Semaine 20 : 11 au 15 mars 2024

A. Fonctions : limites

∗ Limite d'une fonction en un point, en l'infini: définitions.
A noter (programme officiel): "la définition d'une limite par (ε, α) est présentée, mais les détails techniques ne sont pas un attendu du programme"
∗ Limite à droite, limite à gauche: définition, notations $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ en cas de limite finie.
∗ Si f possède une limite $\boxed{\text{finie}}$ $(\ell \in \mathbb{R})$ en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors:
la limite est unique. (admis); f est bornée *sur un voisinage de* x_0; si $a < \ell < b$ alors $a < f(x) < b$ pour tout réel x au voisinage de x_0. (admis); si $\ell > 0$ alors f ne s'annule pas au voisinage de x_0: on peut minorer f par $\dfrac{\ell}{2} > 0$.
∗ Caractérisation séquentielle de la limite (admise).
∗ **Limite et relation d'ordre:** comparaisons, théorème d'encadrement.
∗ **Théorème de la limite monotone**; une fonction monotone sur un intervalle ouvert admet une limite finie ou infinie aux bornes de l'intervalle.
∗ **Opérations:** composition; somme, produit, quotient.
∗ **Pour lever une indétermination:** factorisation par "le plus haut degré" en l'infini, quantité conjuguée, croissances comparées.
∗ **Fonctions équivalentes:** définition (on se limite aux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage du point de référence).
→ Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; f et g deux fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a. Soit une fonction h.
Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x \to b} h(x) = a$ alors: $f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$.
→ Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; f et g deux fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a. Soit (u_n) une suite réelle.
Si la suite u a pour limite a et $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f(u_n) \sim g(u_n)$.
→ équivalents usuels en 0 de $\sin(x), \tan x, \cos x - 1, e^x - 1, \ln(1+x), \sqrt{1+x} - 1, (1+x)^\alpha - 1$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
→ **Opérations:** transitivité, multiplication par un réel non nul, produit, quotient, élévation à une puissance constante.
→ **Application:** recherche de la limite.

B. Langage Python

∗ **Tableaux :**
∗ **Listes** : **tris par insertion et sélection "en place" ou non.**

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question d'informatique (langage `python`) parmi : (les élèves doivent savoir coder les algorithmes de tri !)

1. Tri par insertion.
l'élève doit être capable d'expliquer l'algorithme sur un exemple simple .
2. Tri par sélection "non en place".
l'élève doit être capable d'expliquer l'algorithme sur un exemple simple.
3. Tri par sélection "en place".
l'élève doit être capable d'expliquer l'algorithme sur un exemple simple.
4. Écrire une fonction `matid` qui permette de construire la matrice identité de taille $n \times n$.
on n'utilisera pas la fonction `eye()`
5. Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle **trace de** A**, notée** $\text{tr}(A)$ la somme de coefficients diagonaux de A, soit: $\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.
Écrire une fonction `mattrace(A)` qui calcule la trace d'une matrice carrée A.
on n'utilisera pas la fonction `trace()`
6. Écrire une fonction `determinant(A)` qui pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ calcule et renvoie son déterminant.

Puis une question parmi les suivantes :

1. Étude de la limite en 0 des fonctions valeur absolue et partie entière.
2. Montrer que : $\forall \alpha > 0, \forall a > 1, \lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha a^x = 0$
3. Montrer que : $\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0, \lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$
4. (difficile) Soient f et g deux fonctions respectivement définies sur $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$, avec $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. Soit x_0 un point ou un bord de $\mathcal{D}_f$.
Montrer que : si f a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en x_0 et g a une limite $\ell' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en ℓ, alors $g \circ f$ a pour limite ℓ' en x_0.