Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2023/2024
Mme MOREL

DS 6 – Mathématiques

Mercredi 6 mars 2024

Durée de l'épreuve : 3 heures 30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à $\boxed{\textbf{encadrer}}$, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de deux exercices de mathématiques et d'un exercice d'informatique.

L'informatique doit être traitée sur une feuille à part.

Exercice 1. : (langage `Python`)

1. Écrire une fonction `Tableau(n)` qui prend en argument un entier naturel `n` non nul et qui renvoie un tableau carré de taille n dont les coefficients valent :
   - 2 sur la diagonale,
   - -1 ailleurs.
2. Écrire une fonction `somme(T,i)` qui prend en arguments un tableau et un entier naturel `i` non nul, et qui renvoie la somme des éléments de la ligne i de T.
3. Écrire une fonction `test(T)` qui prend en arguments un tableau et qui renvoie `True` si la somme des éléments de chaque ligne de T vaut 1, `False` sinon. *on pourra utiliser la fonction `somme(T,i)` si nécessaire.*

Exercice 2. : Considérons la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans cet exercice, on se propose, de plusieurs manières différentes et indépendantes, de calculer les puissances de la matrice A et d'étudier son inversibilité. Toutes les parties sont indépendantes.

Partie I : Rang

1. Calculer le rang de la matrice A.
2. La matrice A est-elle inversible ?

Partie II : Binôme de Newton

Posons $B = A - I_3$.

3. Calculer B^2.
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer la matrice B^k en fonction de B et de k.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n.

Partie III : Diagonalisation

6. Déterminer l'ensemble des réels λ tels que la matrice $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible.

Posons

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
8. (a) Calculer la matrice $D = PAP^{-1}$.
   (b) Calculer les puissances de la matrice D. (on demande ses coefficients)
   (c) En déduire les puissances de la matrice A en fonction de P, n, D et P^{-1}. (on n'utilisera pas la question II.5)
9. Justifier que la matrice D est inversible et donner son inverse. (on demande ses coefficients)
10. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse en fonction de P, D et P^{-1}.

Partie IV : Polynôme annulateur

11. Montrer que $A^2 - 4A + 3I_3 = 0_3$.
12. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse. (on n'utilisera pas la question III.10)
13. (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$A^n = x_n A + y_n I_3$$

   et que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+2} = 4y_{n+1} - 3y_n. \end{cases}$$

   (b) Expliciter le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire les puissances de la matrice A et retrouver le résultat de la dernière question de la partie II.

Exercice 3. : On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ f(x) = \sqrt{\sin x} + x$$

I. Étude de f

1. Faire l'étude complète de f sur son ensemble de définition.
   on ADMET que f admet une tangente verticale au point $(0, 0)$
2. Montrer que f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle J à préciser.
3. Dresser le tableau de variations de f^{-1}.
4. Tracer l'allure graphique de la courbe représentative de f^{-1}.
5. Montrer que : $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ x \geqslant f^{-1}(x)$

II. Étude d'une suite récurrente.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\, u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$$

1. Tracer le dynamisme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.