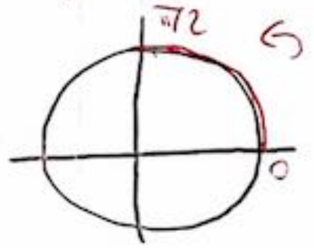
DS6. Corrigé
Mercredi 6 Mars 2024

## Exercice 3.

### I. Etude de f

(1) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x = 0 \iff x = 0$

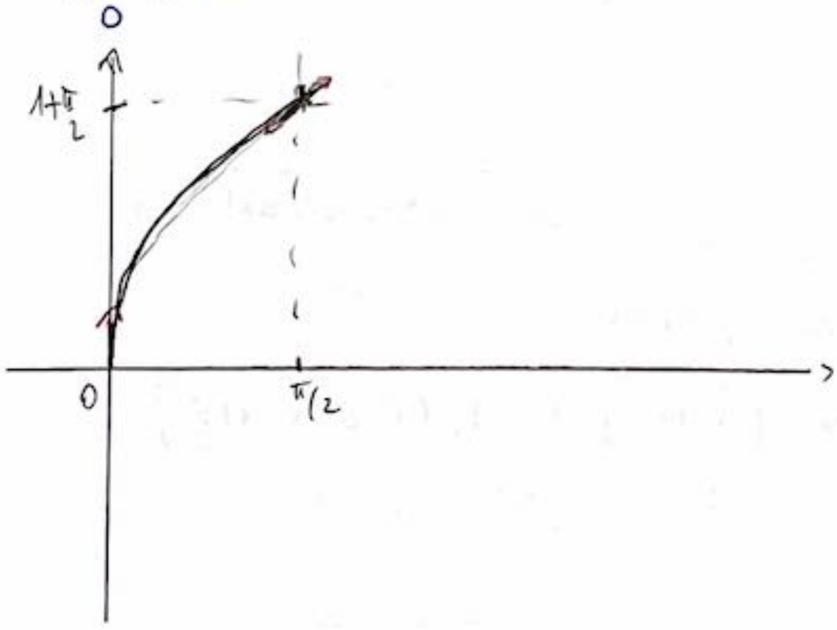
donc f dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ comme composée de fonctions dérivables.




$\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \times \cos(x) + 1$

$\forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \geq 0$ donc $f'(x) > 0$.

| $x$ | $0$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $+$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $1+\frac{\pi}{2}$ |




$f'(\frac{\pi}{2}) = 1$

② · $f \nearrow$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc $f$ injective.

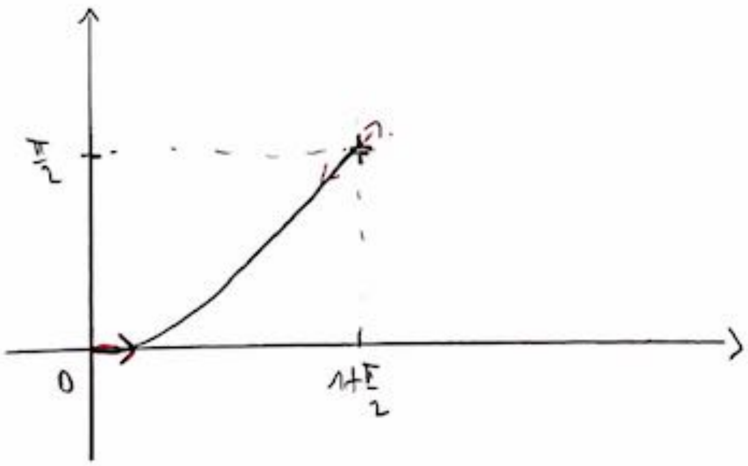
· $f([0, \frac{\pi}{2}]) = [0, 1+\frac{\pi}{2}]$ donc $f$ surjective de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $[0, 1+\frac{\pi}{2}]$.

· $f$ est donc bijective de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $J = [0, 1+\frac{\pi}{2}]$.

③

| $x$ | $0$ | | $1+\pi/2$ |
|---|---|---|---|
| $f^{-1}$ | $0$ | $\nearrow$ | $\pi/2$ |

④




⑤ $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(t) - t = \sqrt{\sin t} + t - t = \sqrt{\sin t} \geq 0$

donc $f(t) \geq t$

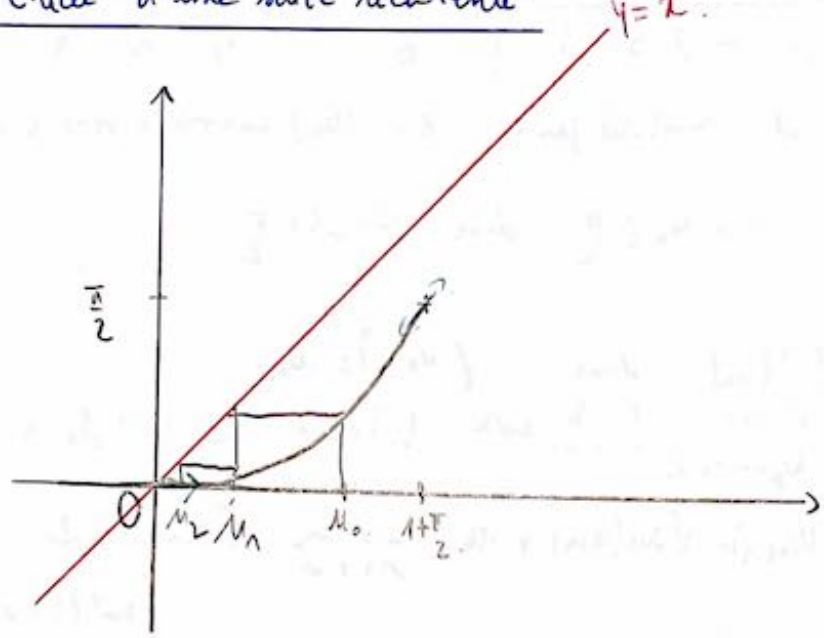
or $f^{-1} \nearrow$ sur $[0, 1+\frac{\pi}{2}]$ et $t, f(t) \in [0, 1+\frac{\pi}{2}]$.

donc $f^{-1}(f(t)) \geq f^{-1}(t)$

$t \geq f^{-1}(t)$

## II - Etude d'une suite récurrente

(1.)




(2.) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ : $0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2}$ :

- $u_0 = 1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
- $n \geq 0$. Sq $u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.

Mq . $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{\pi}{2}$.

$$0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2}$$

or $f^{-1} \nearrow$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc $f^{-1}(0) \leq f^{-1}(u_n) \leq f^{-1}(\frac{\pi}{2})$

or $f^{-1}(0) = 0$ car $f(0) = 0$

et $f^{-1}(\frac{\pi}{2}) \leq \frac{\pi}{2}$ (I.5)

donc $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{\pi}{2}$ ✓

récurrence achevée.

(3.) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f^{-1}(x) \leq x$

or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $f^{-1}(u_n) \leq u_n$

$u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $(u_n)$ est décroissante

- $(u_n)$ est décroissante et minorée par $0$ donc $(u_n)$ converge vers $l \in \mathbb{R}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad 0 \leq l \leq \frac{\pi}{2}$$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ donc $f(u_{n+1}) = u_n$

$$u_n \longrightarrow l$$

$$f(u_{n+1}) = \sqrt{\sin(u_{n+1})} + u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{\sin(l)} + l$$

$\left(\sin(l) \geq 0 \text{ car } l \in [0, \pi/2]\right)$

donc $l = \sqrt{\sin(l)} + l$

$\Leftrightarrow \sqrt{\sin(l)} = 0$

$\Leftrightarrow \sin(l) = 0 \Leftrightarrow l = 0 \quad \left(\text{car } l \in [0, \frac{\pi}{2}]\right)$

Conclusion : $(u_n)$ converge vers $0$.

## Exercice 2.

### Partie I : Rang.

1.

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$$

$$= rg\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2$$

$$= rg \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$= \boxed{3}$$

(2.) $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $rg(A) = 3$ donc A est inversible

## Partie II – binôme de Newton

(3.) $$B = A - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B^2 = 2B}$$

(4.) Par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ B^k = 2^{k-1} B$

(5.) $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = (B + I)^n$ B et I commutent donc par le binôme de Newton.

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I^{n-k} = \binom{n}{0} I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B^k$$

$$A^n = I + \left( \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} \right) B = I + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k - 1 \right) B.$$

$$A^n = I + \left( \frac{3^n - 1}{2} \right) B$$

## Partie III - Diagonalisation

(6.) $A-\lambda I_3$ n'est pas inversible ssi $rg(A-\lambda I_3) \neq 3$.

$$rg(A-\lambda I_3) = rg\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -6 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} -6 & -2 & 1-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 3-\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3.$$

$$= rg\begin{pmatrix} -6 & -2 & 1-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -2(3-\lambda) & (1-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 6L_3 + (3-\lambda)L_1$$

$$= rg\begin{pmatrix} -6 & -2 & 1-\lambda \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

donc $A-\lambda I_3$ n'est pas inversible ssi $\lambda = 1$ ou $\lambda = 3$.

(7) $\forall Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on considère le système $PX=Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$PX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y = a \\ 3x + y + z = b \\ 3x - y = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = c \\ 3x + y + z = b \\ 4x - y = a \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_3.$$

$$\iff \begin{cases} 3x - y = c \\ 2y + z = b - c & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ y = 3a - 4c & L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x - y = c \\ y = 3a - 4c & L_2 \leftrightarrow L_3. \\ 2y + z = b - c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x - y = c \\ 1y = 3a - 4c \\ 1z = -6a + b + 7c & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$rg(S) = 3$ donc P est inversible

$PX = Y \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3}(y + c) = \frac{1}{3}(3a - 3c) = a - c \\ y = 3a - 4c \\ z = -6a + b + 7c \end{cases}$ donc $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix}}$

8 (a) $\boxed{D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$

(b) D étant diagonale donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}}$

(c) $D = PAP^{-1}$ donc $P^{-1}D = AP^{-1}$

$P^{-1}DP = A$

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ : $A^n = P^{-1} D^n P^{-1}$

- $\underline{n=0}$ : $A^0 = I$ et $P^{-1} D^0 P = P^{-1} P = I$ ✓
- $\underline{n \geq 0}$ : Sq $A^n = P^{-1} D^n P$ à un certain rang $n$.

au rang $n+1$ : $A^{n+1} = A^n \times A$

$$\underset{(HR)}{=} (P^{-1} D^n P)\, P^{-1} D P$$

$$= P^{-1} D^n (P P^{-1}) D P$$

$$= P^{-1} D^{n+1} P \quad ✓$$

récurrence achevée

(9.) $D$ est diagonale et $rg(D) = 3$ donc $D$ est inversible

$$\boxed{\text{et } D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}}$$

(10.) $P$ est inversible donc $P^{-1}$ aussi et $(P^{-1})^{-1} = P$

$D$ est inversible donc par produit, $P^{-1} D P = A$ est inversible.

$$\text{et } A^{-1} = (P^{-1} D P)^{-1} = P^{-1} D^{-1} (P^{-1})^{-1}$$

$$A^{-1} = P^{-1} D P$$

## Partie IV - Polynôme annulateur

(11) calcul.

(12) $A^2 - 4A + 3I = 0$

$A^2 - 4A = -3I$

$-\frac{1}{3}(A^2 - 4A) = I$

$$A\Big[\underbrace{-\tfrac{1}{3}(A-4I)}_{B}\Big] = I$$

De même : $BA = I$ donc $A$ est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{3}(A-4I)$

(13.) (a) $\forall n,\ \mathcal{P}(n) : \exists\, x_n, y_n \in \mathbb{R}$ tq $A^n = x_n A + y_n I$

• $n=0$ : $A^0 = I = 0.A + 1.I$ donc on prend $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$

$\mathcal{P}(0)$ vraie.

• $n \geq 0$. Sq $\mathcal{P}(n)$ vraie à un certain rang $n$.

au rang $n+1$ : $A^{n+1} = A^n \times A \underset{(HR)}{=} (x_n A + y_n I)A$

$$= x_n A^2 + y_n A$$
$$= x_n(4A - 3I) + y_n A$$
$$= (4x_n + y_n)A - 3x_n I$$

donc on prend $\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n + y_n \\ y_{n+1} = -3x_n \end{cases}$ $\mathcal{P}(n+1)$ vraie

récurrence achevée.

Conclusion : $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 4x_0 + y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = 4x_{n+1} + y_{n+1} \\ \qquad x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n \end{cases}$ et $\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = -3x_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \\ y_{n+2} = -3x_{n+1} = -12x_n - 3y_n \\ \qquad = 4y_{n+1} - 3y_n \end{cases}$

(b). <u>éq° caractéristique :</u> $x^2 = 4x - 3$.

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$.

donc $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, x_n = \lambda + \mu 3^n$, avec :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda + 3\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu = -\frac{1}{2} \\ \mu = \frac{1}{2} \end{cases}$$

donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_n = -\frac{1}{2} + \frac{3^n}{2}}$

De même : $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, y_n = \lambda + \mu 3^n$ avec,

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda + 3\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\mu = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 - \mu = \frac{3}{2} \\ \mu = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \frac{3}{2} - \frac{3^n}{2}}$

(c) Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3^n}{2}\right) A + \left(\frac{3}{2} - \frac{3^n}{2}\right) I$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{3^n}{2}\right)(A - I) + \left(-\frac{1}{2} + \cancel{\frac{3^n}{2}} + \frac{3}{2} - \cancel{\frac{3^n}{2}}\right) I$$

$$A^n = I + \left(\frac{3^n - 1}{2}\right) B.$$ ✓