Semaine 21 : 18 au 22 mars 2024

A. Fonctions : limites (voir semaine 20)

B. Fonctions : continuité

$*$ **Fonction continue en un point:** définition; continuité à gauche, à droite; exemples des fonctions valeur absolue et partie entière.
$*$ **Prolongement par continuité**
$*$ **Opérations:** somme, produit, quotient, composée de fonctions continues.
$*$ **Théorèmes des valeurs intermédiaires** (ADMIS); l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle ; L'image d'un segment par une fonction continue est un segment; toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
$*$ **Bijections continues:** Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I dans l'*intervalle* image $J = f(I)$.
La bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue, strictement monotone (de même monotonie que f) sur J.
$\to$ *définition, monotonie, continuité et tableau de variations de la fonction* arctan
$*$ **Théorème de bijection :** Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors $\forall k \in J = f(I)$, l'équation $f(x) = k$ admet une *unique* solution dans I.
$\to$ **étude de suites implicites.**

C. Langage Python

Algorithme de Dichotomie.

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question d'informatique (langage `python`) parmi : (les élèves doivent savoir coder les algorithmes de tri !)

1. Algorithme de Dichotomie.
   l'élève doit être capable d'expliquer l'algorithme et de l'écrire .
2. Écrire une fonction `moyenne(A)` qui renvoie la moyenne des coefficients du tableau `A`.
3. (difficile) Écrire une fonction `compartab(A,B)` qui prend en arguments deux tableaux A et B , et qui renvoie:
   `True` si A et B ont même taille et mêmes coefficients, `False` sinon.
4. Écrire une fonction `duplique` qui crée une copie d'un tableau donné. Pour cela, on créera un tableau rempli de 0 de même format que le tableau de départ, puis on remplira une par une les cases de ce nouveau tableau avec les éléments du tableau de départ.

Puis une question parmi les suivantes :

1. Étude d'un prolongement par continuité en 0 de $(x \mapsto x^\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
2. On considère la fonction f définie par: $f(x) = \sqrt{\tan x}$.
   Montrer que f est bijective de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J à déterminer.
   Établir le tableau de variations de f^{-1} sur J.
3. Soit $g(x) = x^2 + \ln x$, $\forall x > 0$.
   Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, notée α. Montrer que $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$. (*on donne* $0,69 < \ln 2 < 0,70$)
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et l'équation :
   $(E_n) \quad x + \tan x = n$, d'inconnue $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (E_n) possède une unique solution, notée x_n.
5. (difficile) Montrer le résultat suivant: si f continue sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors f est de signe constant sur I.