Semaine 22 : 25 au 29 mars 2024

A. Fonctions : continuité (voir semaine 21)

B. Dénombrement.

∗ Cardinal de la réunion de deux ou trois ensembles finis, de n ensembles finis **deux à deux disjoints**
  → **dénombrement en utilisant une partition / système complet.**
∗ Cardinal du complémentaire; d'une partie.
  → **dénombrement par passage au complémentaire.**
∗ Cardinal d'un produit cartésien.
∗ ***Choix successifs de p éléments parmi n éléments, avec répétitions possibles:***
  p-liste de E: définition; il y a n^p p-listes de E.
∗ ***Choix successifs de p éléments parmi n éléments, sans répétitions:***
  p-liste sans répétitions de E: définition; il y a $n(n-1)\dots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ $(p \leqslant n)$ p-listes sans répétitions de E.
∗ ***Choix successifs de tous les éléments d'un ensemble à n éléments, sans répétitions:***
  permutation: liste de E contenant exactement une fois chaque élément de E; il y a $n!$ permutations de E.
∗ Deux ensembles finis E et F sont de même cardinal ssi il existe une bijection entre E et F.
∗ ***Choix simultanés de p éléments parmi n éléments ($p \leqslant n$):***
  p-combinaison de E: définition; il y a $\dbinom{n}{p}$ p-combinaisons de E; réinterprétation des propriétés des coefficients binômiaux.
∗ Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

C. Langage Python

Algorithme de Dichotomie.

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question d'informatique (langage `python`) parmi : (les élèves doivent savoir coder les algorithmes de tri !)

1. Algorithme de Dichotomie.
   l'élève doit être capable d'expliquer l'algorithme et de l'écrire .
2. Écrire une fonction `moyenne(A)` qui renvoie la moyenne des coefficients du tableau `A`.
3. (difficile) Écrire une fonction `compartab(A,B)` qui prend en arguments deux tableaux A et B , et qui renvoie:
   `True` si A et B ont même taille et mêmes coefficients, `False` sinon.
4. Écrire une fonction `duplique` qui crée une copie d'un tableau donné. Pour cela, on créera un tableau rempli de 0 de même format que le tableau de départ, puis on remplira une par une les cases de ce nouveau tableau avec les éléments du tableau de départ.

Puis une question parmi les suivantes :

1. Étude d'un prolongement par continuité en 0 de $(x \mapsto x^\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
2. On considère la fonction f définie par: $f(x) = \sqrt{\tan x}$.
   Montrer que f est bijective de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J à déterminer.
   Établir le tableau de variations de f^{-1} sur J.
3. Soit $g(x) = x^2 + \ln x$, $\forall x > 0$.
   Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, notée α. Montrer que $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$. (*on donne* $0,69 < \ln 2 < 0,70$)
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et l'équation :
   $(E_n) \quad x + \tan x = n$, d'inconnue $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (E_n) possède une unique solution, notée x_n.
5. (difficile) Montrer le résultat suivant: si f continue sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors f est de signe constant sur I.
6. (difficile) Preuve de la formule du chef par la méthode du double décompte.
7. (difficile) Preuve de la formule de symétrie par la méthode du double décompte.