Semaine 22 : 24 au 28 mars 2025

A. Probabilités : univers fini.

À rajouter cette semaine :
$*$ **Formule de Bayès.**
$*$ **Indépendance:** définition de deux événements indépendants; n événements mutuellement indépendants / deux à deux indépendants; propriété: soient $A_1, \dots, A_n$ n événements deux à deux (respectivement mutuellement) indépendants.
Posons $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, $\forall i = 1, \dots, n$. Alors les événements $B_1, \dots, B_n$ sont deux à deux (respectivement mutuellement) indépendants.

B. Fonctions : limites

$*$ Limite d'une fonction en un point, en l'infini: définitions.
A noter (programme officiel): "la définition d'une limite par (ε, α) est présentée, mais les détails techniques ne sont pas un attendu du programme"
$*$ Limite à droite, limite à gauche: définition, notations $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ en cas de limite finie.
$*$ Si f possède une limite $\boxed{\text{finie}}$ $(\ell \in \mathbb{R})$ en $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Alors:
la limite est unique. (admis); f est bornée *sur un voisinage de* x_0; si $a < \ell < b$ alors $a < f(x) < b$ pour tout réel x au voisinage de x_0. (admis); si $\ell > 0$ alors f ne s'annule pas au voisinage de x_0: on peut minorer f par $\frac{\ell}{2} > 0$.
$*$ Caractérisation séquentielle de la limite (admise).
$*$ **Limite et relation d'ordre:** comparaisons, théorème d'encadrement.
$*$ **Théorème de la limite monotone**; une fonction monotone sur un intervalle ouvert admet une limite finie ou infinie aux bornes de l'intervalle.
$*$ **Opérations:** composition; somme, produit, quotient.
$*$ **Pour lever une indétermination:** factorisation par "le plus haut degré" en l'infini, quantité conjuguée, croissances comparées.
$*$ **Fonctions équivalentes:** définition (on se limite aux fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage du point de référence).
→ Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; f et g deux fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a. Soit une fonction h.
Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x \to b} h(x) = a$ alors: $f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$.
→ Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; f et g deux fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a. Soit (u_n) une suite réelle.
Si la suite u a pour limite a et $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f(u_n) \sim g(u_n)$.
→ équivalents usuels en 0 de $\sin(x), \tan x, \cos x - 1, e^x - 1, \ln(1+x), \sqrt{1+x} - 1, (1+x)^\alpha - 1, \arctan(x)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
→ **Opérations:** transitivité, multiplication par un réel non nul, produit, quotient, élévation à une puissance constante.
→ **Application:** recherche de la limite.

C. Langage `python`

Listes : parcours (complet ou incomplet) d'une liste par éléments ou indices

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question d'informatique (langage `python`) parmi :

1. Écrire une fonction `recherchemax(L)` de paramètre une liste de nombres `L`, qui renvoie le maximum des éléments de `L`.
2. Écrire une fonction `nombre(L,a)` de paramètres `L` une liste et `a` une variable, qui renvoie le nombre de `a` que contient `L`.
3. Écrire une fonction `remplace(L)` d'argument une liste de nombres `L` qui remplace tous les 0 qu'elle contient par des 1.
4. Écrire une fonction `position(L,a)` de paramètres `L` une liste et `a` une variable, qui renvoie: `introuvable` si `a` n'est pas dans la liste; la (première) position de `a` s'il y est (plusieurs fois).

Puis une question de cours parmi les suivantes, puis passage aux exercices :

1. Montrer que : $\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0, \lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$
2. Montrer que : $\forall \alpha > 0, \forall a > 1, \lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha a^x = 0$
3. Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin(\frac{x+1}{x^2})$
4. Une urne contient une boule noire et $n-1$ boules blanches. On effectue n tirages au hasard d'une boule avec remise.
Quelle est la probabilité p_n que la boule noire ne sorte à aucun des tirages? Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?