DM8 - Corrigé

Exercice 1

1. $u_n = \dfrac{n+1-(n-1)}{(n-1)(n+1)} = \dfrac{2}{(n-1)(n+1)}$ donc $\boxed{u_n \sim \dfrac{2}{n^2}}$

2. $\left.\begin{array}{l} \sin(x) \underset{0}{\sim} x \text{ et } \tan x \underset{0}{\sim} x \\ \text{et } x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \text{ donc } \ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^2 \end{array}\right\}$ donc $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x \times x^2}{x \times x}$

$$\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} x}$$

Exercice 2

1. • $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ or $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

donc $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

donc $\ln\left(1 - \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{4x} \times \left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

or $\sqrt{4x}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -2$ donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2}$

(2.) $g(x) = e^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)}$

- $\frac{x}{\sin(x)} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x}$ donc $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

- $\frac{\sin x}{x - \sin x} = \frac{\sin x}{x\left(1 - \frac{\sin(x)}{x}\right)} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{1 - \frac{\sin x}{x}}$

or $1 \neq 0$ donc $\frac{\sin x}{x} \underset{0}{\sim} 1$ donc $\frac{\sin x}{x - \sin x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{1 - \frac{\sin x}{x}}$

donc $\frac{\sin x}{x - \sin x} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) \underset{0}{\sim} \frac{1}{1 - \frac{\sin x}{x}} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)$

- $\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) = -\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\ln\left(1 + \left(\frac{\sin x}{x} - 1\right)\right)$

or $\frac{\sin x}{x} - 1 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ donc $\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) \underset{0}{\sim} -\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right)$

donc $\frac{\sin x}{x - \sin x} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) \underset{0}{\sim} \frac{1}{1 - \frac{\sin x}{x}} \times \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)$

Donc $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x - \sin x} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) = 1$

Donc $\boxed{\lim_{x \to 0} g(x) = e}$

Exercice 3

1. f définie sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$.

$\forall x>0,\ f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$

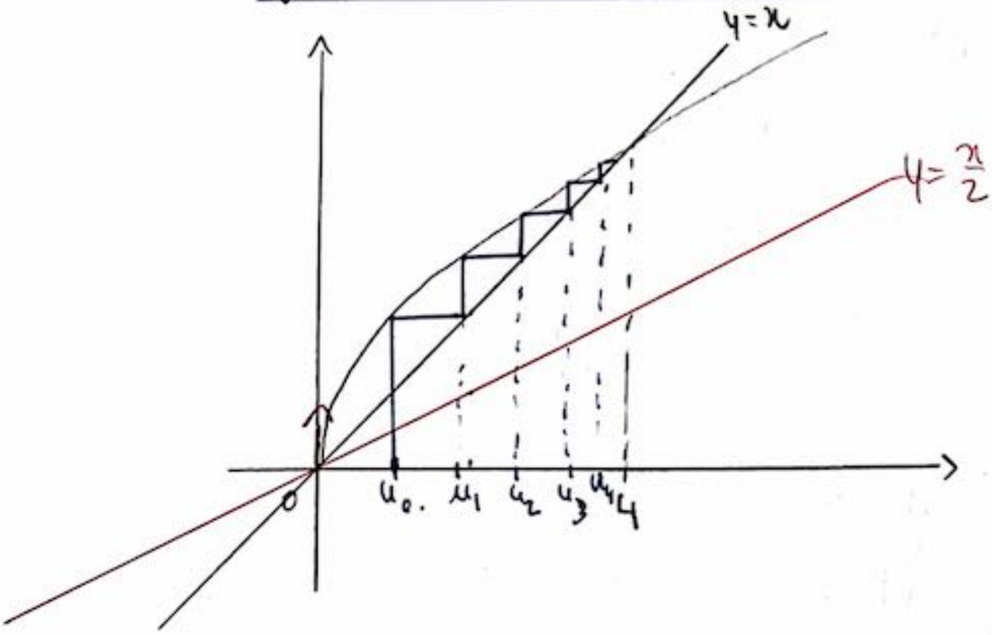
x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

en $+\infty$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

$$f(x) - \frac{x}{2} = \sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

donc $\mathcal{C}_f$ admet une B.P de direction $y = \frac{x}{2}$



2. $\forall x\geq 0,\ f(x) - x = -\frac{x}{2} + \sqrt{x} = \frac{2\sqrt{x}-x}{2}.$

• $2\sqrt{x} - x = 0 \iff \sqrt{x}(2-\sqrt{x}) = 0$

$\iff x=0$ ou $\sqrt{x} = 2$

$\iff x=0$ ou $x=4$.

$\cdot\ 2\sqrt{x} - x > 0 \iff \sqrt{x}(2-\sqrt{x}) > 0$

$\iff 2-\sqrt{x} > 0$

$\iff \sqrt{x} < 2$

$\iff x < 4$.

x	0		4		$+\infty$
$f(x)-x$	0	$-$	0	$+$	

(3.) cf. p.3.

Conjectures : $(u_n) \nearrow$ et converge vers 4

(4.) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 4$.

$\cdot$ $n=0$: $u_0 = 1$ ✓

$\cdot$ $n \geq 0$: Sq $u_n \in [0,4]$ à un certain rang n.

$0 \leq u_n \leq 4$ or $f \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$ et $0, u_n, 4 \in \mathbb{R}_+$

donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(4)$

$0 \leq u_{n+1} \leq 4$ ✓ récurrence achevée

$(f(4) = 4)$

(5). $\forall x \in [0,4]$: $f(x) - x \geq 0$ (cf 3)

or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,4]$ donc $f(u_n) - u_n \geq 0$

$u_{n+1} \geq u_n$

Donc $(u_n) \nearrow$

$(u_n) \nearrow$ et majorée par 4 (cf 4) donc (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,4]$ donc $\ell \in [0,4]$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{2} + \sqrt{u_n}$

or $u_{n+1} \longrightarrow l$

et $\frac{u_n}{2} + \sqrt{u_n} \longrightarrow \frac{l}{2} + \sqrt{l} \quad (l \geq 0)$

donc à la limite, $l = \frac{l}{2} + \sqrt{l} \iff g(l) = 0$

$\iff l = 0$ ou $l = 4$ (cf 2.)

or $(u_n) \nearrow$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0$

$u_n \geq 1$ donc $l \geq 1$ donc $l \neq 0$.

Conclusion: (u_n) converge vers 4