

I/ Calculer des limites:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\sin(\pi x) (e^{x-2} - 1)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(5^x - 2^x)}{x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^4 + 1)^{1/4} - 1}{(1 - 2x^3)^{1/3} - 1}$$

II/ Déterminer un équivalent:

$$1) x \ln(1 + x^2) - 2x \ln(x) \text{ en } +\infty$$

$$2) \sin^2(e^{3x} - 1) \text{ en } 0$$

$$3) \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}\right)^x - 1 \text{ en } +\infty$$

III/ Etude d'une suite simple

Exercice On considère la fonction $\varphi_n(x) = n(x-1) - x \ln x$, pour tout entier naturel $n \geq 2$, pour tout réel x strictement positif.

1. Montrer que, $\forall n \geq 2$, l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1, +\infty[$, notée a_n .
2. Étudier la monotonie de la suite (a_n) .