Semaine 23 : 2 au 5 avril 2024

A. Dénombrement (voir semaine 22)

B. Probabilités : univers fini.

$*$ **Événements:** $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des événements de l'expérience aléatoire d'univers Ω;
événements incompatibles, événement contraire, système complet d'événements (s.c.e).
$*$ **Probabilité:** définition; propriétés: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, donc $P(\emptyset) = 0$, $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$, si $A \subset B$ alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$, $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$; probabilité de l'union de deux, trois événements, de n événements deux à deux incompatibles.
$*$ **Choix d'un modèle probabiliste:** (résultats admis)
$*$ Soit Ω un ensemble FINI et $p_1, \ldots, p_n$ des réels.
Il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $P(\{\omega_i\}) = p_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$ *si et seulement si*: $\forall i \in [|1, n|]$, $p_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Quand elle existe, la probabilité P est unique et $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \sum_{k \,/\, \omega_k \in A} p_k = \sum_{k \,/\, \omega_k \in A} P(\{\omega_k\})$.
$*$ Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable FINI, avec card $\Omega = n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
Il existe une unique probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ pour laquelle les événements élémentaires sont équiprobables.
$\forall \omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{n}$ et pour tout événement A de Ω, $P(A) = \dfrac{cardA}{card\Omega}$, P est appelée la *probabilité uniforme sur* Ω
$*$ **Probabilités conditionnelles:** définition (notation P_A); il s'agit bien d'une probabilité.
$*$ **Formule des probabilités composées.**
$*$ **Formule des probabilités totales.**
$\rightarrow$ *Les arbres sont tolérés , mais ne constituent en aucun cas une preuve : les formules probabilistes sont attendues.*
$*$ **Formule de Bayès.**
$*$ **Indépendance:** définition de deux événements indépendants; n événements mutuellement indépendants / deux à deux indépendants; propriété: soient $A_1, \ldots, A_n$ n événements deux à deux (respectivement mutuellement) indépendants.
Posons $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Alors les événements $B_1, \ldots, B_n$ sont deux à deux (respectivement mutuellement) indépendants.

C. Langage Python

Algorithme de Dichotomie.
Simulation d'expériences aléatoires ; valeur approchée d'une probabilité.

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question parmi les suivantes puis passage aux exercices :

1. Énoncer et démontrer la formule des probabilités totales.
2. Donner la définition d'un système complet d'événements, et montrer que la somme des probabilités vaut 1.
3. Donner la définition de la probabilité conditionnelle sachant A (avec $P(A) \neq 0$) et montrer que c'est une probabilité.
4. Énoncer la formule des probabilités composées.
5. (difficile) Montrer le résultat suivant: si f continue sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors f est de signe constant sur I.
6. (difficile) Preuve de la formule du chef par la méthode du double décompte.
7. (difficile) Preuve de la formule de symétrie par la méthode du double décompte.