Devoir Maison n°9.
Vendredi 29/03/24

Exercice 1

$$f(x) = e^{x \sin x \ln\left(\sqrt{1+\tan(e^{-x})}\right)}$$

$$\ln\left(\sqrt{1+\tan(e^{-x})}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\tan(e^{-x})\right)$$

$\tan(e^{-x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\ln(1+\tan(e^{-x})) \underset{+\infty}{\sim} \tan(e^{-x})$

$e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\tan(e^{-x}) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$

Donc $\ln(1+\tan(e^{-x})) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$

Donc $x \sin x \ln\left(\sqrt{1+\tan(e^{-x})}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x \sin x}{2} e^{-x}$

par C.C $\left.\begin{array}{l} x e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \text{et sin bornée} \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x \sin x \, e^{-x} = 0$

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$

Exercice 2

1. f_n dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_n'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} + n$

$$f_n'(x) = \frac{-e^x + n(1+e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \frac{n e^{2x} + 2ne^x + n - e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{n(e^x)^2 + (2n-1)e^x + n}{(1+e^x)^2}$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $2n-1>0$ donc :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(2) $\boxed{n=1}$ $f_1(x) = \frac{1}{1+e^x} + x$.

en $+\infty$: $\frac{f_1(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x + xe^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

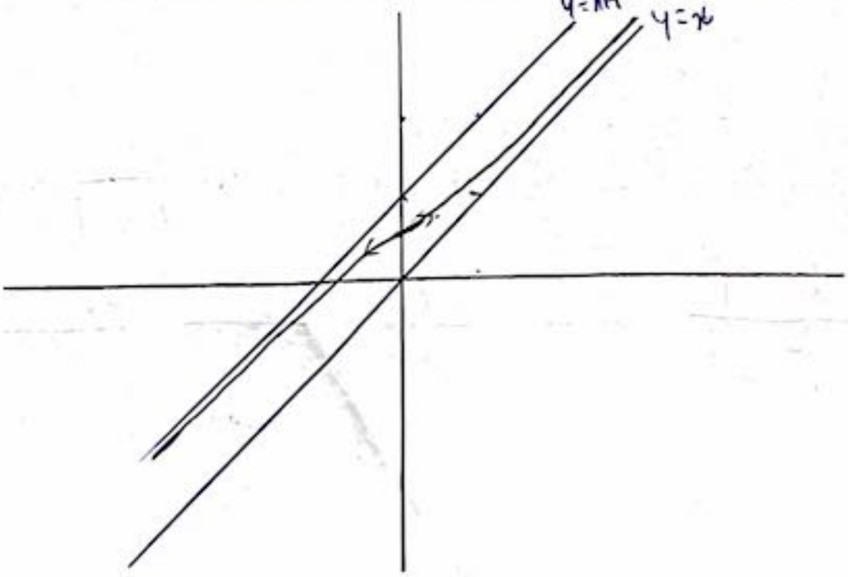
$$f_1(x) - x = \frac{1}{1+e^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

donc $\mathcal{C}_{f_1}$ admet une asymptote : $y = x$

en $-\infty$: $\frac{f_1(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x + xe^x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 1$. (par C.C : $xe^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$)

$$f_1(x) - x = \frac{1}{1+e^x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 1$$

donc $\mathcal{C}_{f_1}$ admet une asymptote : $y = x+1$



$f_1(0) = \frac{1}{2}$

$f_1'(0) = \frac{3}{4}$

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

f_n est continue et $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$ donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $f_n(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f_n, \lim_{+\infty} f_n[$

$=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

$0 \in \mathbb{R}$ donc $f_n(x) = 0$ admet une unique sol : $u_n \in \mathbb{R}$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\left.\begin{array}{l} f_n(0) = \frac{1}{2} > 0 \\ f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+e^{-1/n}} - 1 < 0 \end{array}\right\} \text{ donc } f_n\left(-\frac{1}{n}\right) < f_n(u_n) < f_n(0)$$

$f_n \nearrow$ sur $\mathbb{R}$ donc $-\frac{1}{n} < u_n < 0$

(c) Par encadrement, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

(d) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(u_{n+1}) = \frac{1}{1+e^{u_{n+1}}} + n\, u_{n+1}$

or $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ donc $\frac{1}{1+e^{u_{n+1}}} + (n+1)\, u_{n+1} = 0$

$$\frac{1}{1+e^{u_n}} = -(n+1)\, u_{n+1}$$

donc $f_n(u_{n+1}) = -n\, u_{n+1} - u_{n+1} + n\, u_{n+1} = -u_{n+1} > 0$

donc $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$

$f_n \nearrow$ sur $\mathbb{R}$ donc $u_{n+1} > u_n$

soit $(u_n) \nearrow$

(e) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{u_n}} + n\, u_n = 0$

$$n\, u_n = \frac{-1}{1+e^{u_n}}$$

donc $n\, u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2} \neq 0$ donc $n\, u_n \sim -\frac{1}{2}$

donc $u_n \sim -\frac{1}{2n}$

(4.)

```
import math as m
def f(x, n):
    return 1/(1+n-exp(x))+n*x

def dicho(n):
    a = -2 ; b = 0
    while abs(b-a) > 10**(-2):
        if f(a,n)*f((a+b)/2, n) < 0:
            b = (a+b)/2
        else:
            a = (a+b)/2
    return (a+b)/2
```