Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2023/2024
Mme MOREL

DS 7 – Mathématiques

Mercredi 3 avril 2024

Durée de l'épreuve : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à $\boxed{\textbf{encadrer}}$, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'un exercice d'informatique et de deux exercices de mathématiques .

L'informatique doit être traitée sur une feuille à part.

Exercice 1. (langage PYTHON) : Dans tout cet exercice, on considère uniquement des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Écrire un code Python permettant de définir la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Écrire une fonction Python prenant en argument une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et renvoyant `True` si cette matrice est diagonale et `False` sinon.
3. Donner sans justifier une condition nécessaire et suffisante sur $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ soit inversible. Donner alors la matrice D^{-1}.
4. Écrire une fonction Python `inverse_diag` prenant en argument une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et renvoyant son inverse si A est à la fois diagonale et inversible et un message d'erreur sinon.

Exercice 2. :
On désigne par n un nombre entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines de l'équation $e^x = x^n$, que l'on note (E_n). À cet effet, on introduit la fonction f $_n$ définie par :

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

A. ÉTUDE DES RACINES POSITIVES DE $(E_\mathbf{n})$.

1. Étude des racines positives des équations (E_1) et (E_2).
   (a) Étudier et représenter sur $[0; +\infty[$ les fonctions f_1 et f_2.
   (b) Étudier l'existence de racines positives pour les équations (E_1) et (E_2).
2. Étude des racines positives de l'équation (E_3)
   (a) Étudier et représenter sur $[0; +\infty[$ la fonction f_3.
   En déduire que l'équation (E_3) admet deux racines positives $u < v$ et que $2 < u < 3$ et $4 < v < 5$.
   (b) Soit la suite (y_n) définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$ et la condition initiale y_0 où y_0 est un nombre réel strictement supérieur à u.
      i. Montrer que, si $u < y_0 \leqslant v$, alors :
         — pour tout entier naturel n , $u < y_n \leqslant v$.

— $y_1 \geqslant y_0$

— la suite (y_n) est croissante.

ii. Montrer que, si $v \leqslant y_0$, alors

— pour tout entier naturel n, $v \leqslant y_n$.

— $y_1 \leqslant y_0$

— la suite (y_n) est décroissante.

iii. Étudier enfin la convergence et la limite de la suite (y_n).

3. Étude des racines positives de l'équation (E_n) pour $n \geqslant 3$.

(a) Étudier sur $[0; +\infty[$ la fonction f_n. En déduire que l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n telles que $1 < u_n < v_n$.

(b) Déterminer, pour $n \geqslant 4$, le signe de $f_n(u_{n-1})$.
Déduire des variations de la fonction f_n le sens de variation de la suite (u_n) , puis prouver la convergence de celle-ci.

(c) Montrer que $u_n = \exp(\dfrac{u_n}{n})$, et en déduire la limite L de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

(d) Déterminer, pour $n \geqslant 4$, le signe de $f_n(v_{n-1})$. Déduire des variations de la fonction f_n le sens de variation de la suite (v_n), puis étudier la limite de celle-ci.

B. ÉTUDE DES RACINES NÉGATIVES DE $(E_{\mathbf{n}})$.

1. Existence de racines négatives de (E_n).

(a) Étudier sur $]-\infty; 0]$ les fonctions f_{2k} et f_{2k-1} pour tout entier $k \geqslant 1$.

(b) À quelle condition sur l'entier n l'équation (E_n) admet-elle des racines négatives ?

2. Étude des racines négatives de l'équation (E_{2n}).

(a) Encadrer entre deux entiers consécutifs la racine négative w_n de l'équation (E_{2n}) et déterminer, pour $n > 2$, le signe de $f_{2n}(w_{n-1})$.

(b) En déduire le sens de variation, la convergence et la limite L de la suite (w_n).

Exercice 3. : On dispose de deux pièces indiscernables : l'une équilibrée et l'autre désiquilibrée qui donne Face avec la probabilité $p > \dfrac{1}{2}$. On effectue une série de lancers en choisissant l'une des deux pièces avant chaque lancer. Le but de cet exercice est d'étudier plusieurs stratégies afin de trouver celle qui a le plus de chances d'obtenir Face à chaque lancer. Pour cela, on note pour tout $n \geqslant 1$:

— E_n l'événement "on choisit la pièce équilibrée au $n$ième lancer"

— F_n l'événement "on obtient Face au $n$ième lancer"

Préliminaire

Exprimer $P(F_n)$ en fonction de p et de $P(E_n)$.

Stratégie 1

À chaque lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable.
Montrer que $\forall\, n \geqslant 1$, $P(F_n) = \dfrac{2p+1}{4}$

Stratégie 2

Au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable. Si on obtient Face, on continue d'utiliser la même pièce pour tous les lancers suivants. Sinon, on utilise l'autre pièce pour tous les lancers suivants.

1. Donner $P(F_1)$.
2. Soit $n \geqslant 2$. Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{E_1}(E_n)$ et $P_{\overline{E_1}}(E_n)$.
   En déduire $P(E_n)$.
3. Montrer que $\forall\, n \geqslant 2,\ P(F_n) = \dfrac{4p^2+3}{8}$
4. Comparer les stratégies 1 et 2.

Stratégie 3

Au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable. Puis, à chacun des lancers suivants, on utilise la même pièce que le lancer précédent si on a obtenu Face, sinon, on change de pièce.

1. Donner $P(F_1)$ et $P(F_2)$.
2. Montrer qu'il existe deux réels $a \in]0,1[$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall\, n \geqslant 1,\ P(E_{n+1}) = aP(E_n) + b$.
3. En déduire une expression de $P(E_n)$ en fonction de a, b et n.
4. Montrer que $\forall\, n \geqslant 1,\ P(F_n) = \dfrac{1}{3-2p}\left(1 - \left(\dfrac{2p-1}{2}\right)^{n+1}\right)$
5. Comparer les stratégies 2 et 3.