DS7 - Mathématiques
3/04/2024.

Exercice 2

1.

(a) • $n=1$: $f_1(x) = 1 - xe^{-x}$

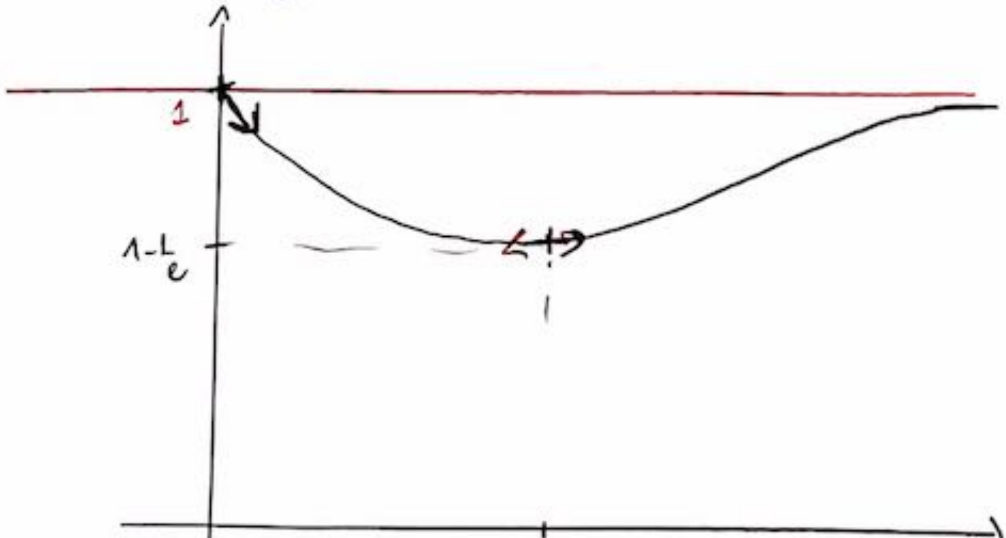
f_1 dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \geq 0$, $f_1'(x) = -e^{-x} + xe^{-x}$
$= e^{-x}(x-1)$

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
f_1	1	$\searrow$	$1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$	$\nearrow$	1

en $+\infty$: par C.C, $\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 1$

donc $\mathcal{C}_{f_1}$ admet une asymptote horizontale $y = 1$

$f_1'(0) = -1$

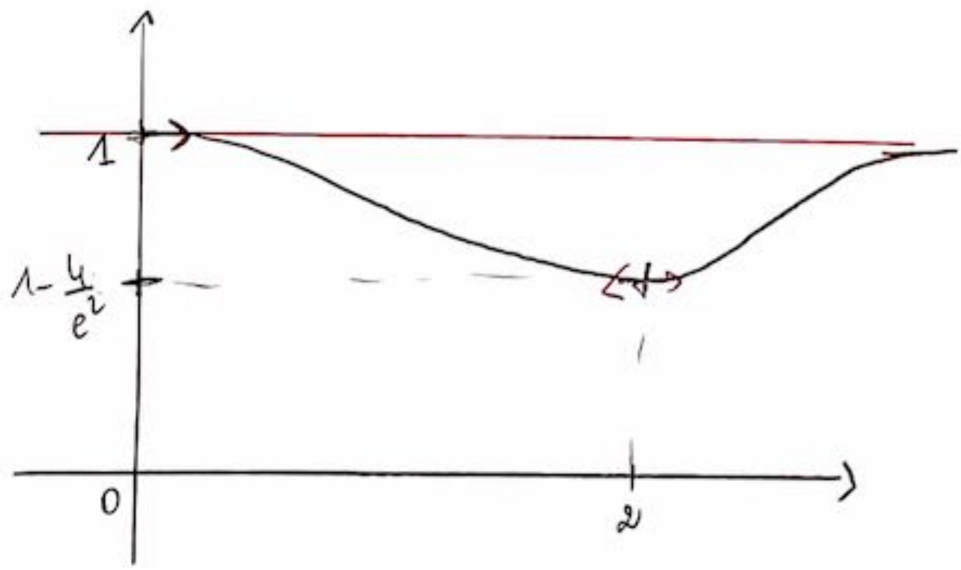


• $n = 2$: $\quad f_2'(x) = 1 - x^2 e^{-x}$

f_2 dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \geq 0$, $f_2'(x) = -2xe^{-x} + x^2 e^{-x}$
$= xe^{-x}(-2+x)$

x	0		2		$+\infty$
$f_2'(x)$	0	$-$	0	$+$	
f_2	1	$\searrow$	$1-\frac{4}{e^2}$	$\nearrow$	1

$1 - \frac{4}{e^2} = \frac{e^2-4}{e^2} > 0$ car $e \geq 2$ donc $e^2 > 4$.



(4) • sur $[0,1]$, $f_1 \Downarrow$
donc $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geq f(1) > 0$
• sur $[1,+\infty[$, $f_1 \Uparrow$
donc $\forall x \geq 1$, $f(x) \geq f(1) > 0$

conclusion : $\forall x \geq 0$, $f(x) > 0$
donc (E_1) n'a aucune racine positive

De même : (E_2) n'a aucune racine positive

2 -

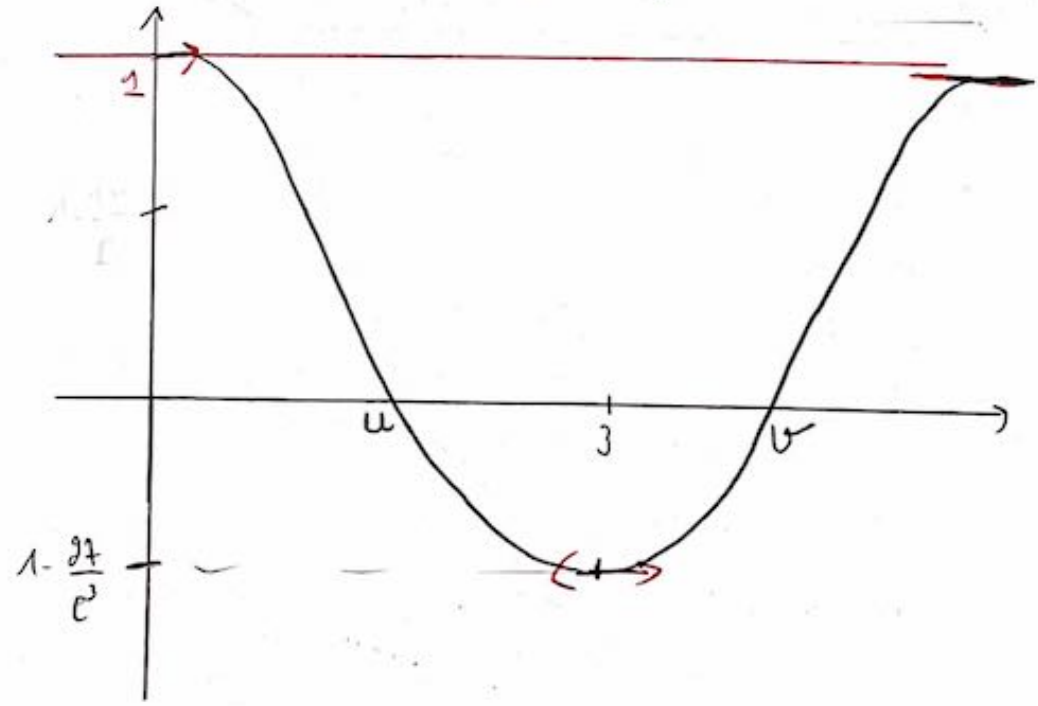
(a) $\underline{n=3}$: $f_3(x) = 1 - x^3 e^{-x}$

f_3 dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \geq 0$, $f_3'(x) = -3x^2 e^{-x} + x^3 e^{-x}$

$= x^2 e^{-x}(-3 + x)$

x	0		u		3		v		$+\infty$
$f_3'(x)$	0			$-$	0			$+$	
f_3	1	$\searrow$			$1-\frac{27}{e^3}$	$\nearrow$			1

$1 - \frac{27}{e^3} = \frac{e^3 - 3^3}{e^3} < 0$ car $e < 3$ donc $e^3 < 3^3$.



$\underline{\cdot \text{ sur } [0,3]}$: f_3 $\searrow$ et continue donc f_3 bijective de $[0,3]$

dans $f([0,3]) = [f_3(3), f_3(0)] = \left[\frac{e^3 - 27}{e^3}, 1\right]$

or $0 \in \left[\frac{e^3-27}{e^3}, 1\right]$ donc $\underline{(E_3) \text{ admet une unique solution } 0 \leq u \leq 3}$.

or $f_3(2) = 1 - \frac{8}{e^2} = \frac{e^2 - 8}{e^2} > 0$ et $f_3(3) < 0$ donc $f_3(2) > f_3(u) > f_3(3)$

or f_3 $\searrow$ sur $[0,3]$ et $2, u, 3 \in [0,3]$

donc $\underline{2 < u < 3}$.

· sur $]3,+\infty[$: f_3 ↗ et continue donc bijective de $]3,+\infty[$ dans :

$$f_3(]3,+\infty[) =]f_3(3), \lim_{+\infty} f_3[$$
$$=]1 - \frac{27}{e^3}, 1[$$

or $0 \in]1 - \frac{27}{e^3}, 1[$ donc (E₃) a une unique solution $v > 3$

$$f_3(4) = 1 - \frac{4^3}{e^4} = \frac{e^4 - 4^3}{e^4} < 0 \quad \text{et} \quad f_3(5) = 1 - \frac{5^3}{e^5} = \frac{e^5 - 5^3}{e^5} > 0$$

donc $f_3(4) < f_3(v) < f_3(5)$

or f_3 ↗ sur $]3,+\infty[$ et $4, v, 5 > 3$ donc $4 < v < 5$

(3)

(i) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $u < y_n \leq v$.

* $n = 0$: c'est l'énoncé

· $n \geq 0$. Sq $u < y_n \leq v$ à un certain rang n.

$$y_{n+1} = 3\ln(y_n)$$

or (HR) :
$$u < y_n \leq v$$
$$\ln(u) < \ln(y_n) \leq \ln(v)$$
$$3\ln(u) < \underbrace{3\ln(y_n)}_{y_{n+1}} \leq 3\ln(v)$$

or $f_3(u) = 0$ donc $1 - u^3 e^{-u} = 0$

$$u^3 e^{-u} = 1$$
$$u^3 = e^u \quad \text{donc } 3\ln(u) = u$$

et de même, $3\ln(v) = v$

donc $u < y_{n+1} \leq v$; récurrence achevée ✓

Mq $y_1 \geq y_0$:

$$y_1 = 3\ln(y_0)$$

or $f_3(y_0) \leq 0$ puisque $u < y_0 \leq v$

donc $1 - y_0^3 e^{-y_0} \leq 0$
$$1 \leq y_0^3 e^{-y_0}$$
$$e^{y_0} \leq y_0^3 \quad \text{donc } 3\ln(y_0) \geq y_0$$

soit $y_1 \geq y_0$ ✓

. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $y_{n+1} \geq y_n$.

* $n=0$: on vient de montrer que $y_1 \geq y_0$ ✓

. $n \geq 0$ Sq $y_{n+1} \geq y_n$ à un certain rang n

$$(HR) : \quad y_{n+1} \geq y_n$$

donc $\ln(y_{n+1}) \geq \ln(y_n)$

donc $3\ln(y_{n+1}) \geq 3\ln(y_n)$

soit $y_{n+2} \geq y_{n+1}$, récurrence achevée -

donc (y_n) est croissante

(ii) . Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $y_n \geq v$

* $n=0$: ✓

* $n \geq 0$. Sq $y_n \geq v$ à un certain rang n.

donc $\underbrace{3\ln(y_n)}_{y_{n+1}} \geq \underbrace{3\ln(v)}_{v}$ récurrence achevée

. $y_1 \leq y_0$: $y_0 \geq v$ donc $f_3(y_0) \geq 0$ donc $y_1 \geq y_0$. ✓

. Par récurrence sur n : $y_{n+1} \leq y_n$. donc (y_n) décroissante

(iii) . Si $u < y_0 \leq v$: (y_n) est croissante et majorée (par v)

donc (y_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$.

or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u < y_n \leq v$ donc $u \leq l \leq v$ donc $l > 0$

or $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$ donc $l = 3\ln(l) \Leftrightarrow f_3(l) = 0$.

$\Leftrightarrow l = u$ ou $l = v$

or $(y_n) \nearrow$ donc $\forall n$, $y_n \geq y_0$ donc $l \geq y_0 > u$ donc $\boxed{l = v}$

· si $y_0 \geq v$: (y_n) ↓ et minorée par v donc (y_n) converge vers $l \geq v > 0$

or $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$ donc $l = 3\ln(l) \iff l = u$ ou $l = v$

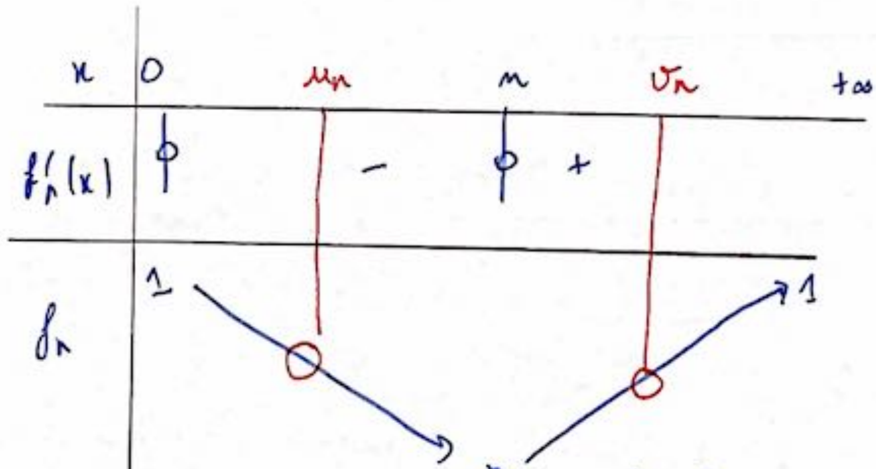
or $l \geq v > u$ donc $\boxed{l = v}$

3.

(a) $\forall x \geq 0$, $f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}$.

f_n dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \geq 0$, $f_n'(x) = -n x^{n-1} e^{-x} + x^n e^{-x}$

$\forall n \geq 3$ $\qquad = x^{n-1} e^{-x}(-n + x)$



$$1 - \frac{n^n}{e^n} = \frac{e^n - n^n}{e^n} < 0$$

signe de $e^n - n^n$: $e < n$ car $e \simeq 2{,}71 < 3 \leq 4 \leq n$

et on recommence le th de bijection sur $[0,n]$ puis sur $]n,+\infty[$

on a donc $0 \leq u_n \leq n < v_n$.

$f_n(u_n) = 0$ et $f_n(1) = 1 - \frac{1}{e^n} = \frac{e^n - 1}{e^n} > 0$ donc $f_n(1) > f_n(u_n)$

f_n ↓↓ sur $[0,n]$ et $1, u_n \in [0,n]$ donc $1 < u_n$.

Conclusion : $1 < u_n < v_n$

(b) $\forall n \geq 4$, $f_n(u_{n-1}) = 1 - u_{n-1}^n e^{-u_{n-1}}$

or $f_{n-1}(u_{n-1}) = 0$ donc $1 - u_{n-1}^{n-1} e^{-u_{n-1}} = 0$

$$u_{n-1}^{n-1} e^{-u_{n-1}} = 1$$

donc $f_n(u_{n-1}) = u_{n-1}^{n-1} e^{-u_{n-1}} - u_{n-1}^{n} e^{-u_{n-1}}$

$= u_{n-1}^{n-1} e^{-u_{n-1}} \left(1 - u_{n-1}\right) < 0$ car $u_{n-1} \geq 1$

donc $f_n(u_{n-1}) < 0$

donc $f_n(u_{n-1}) < f_n(u_n)$ or $f_n \Downarrow$ sur $[0, n]$ et $u_n, u_{n-1} \in [0, n]$

donc $u_n < u_{n-1}$ donc $(u_n) \downarrow$

$(u_n) \downarrow$ et minorée par 1 donc (u_n) converge vers $L \geq 1$.

(c) or $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(u_n) = 0 \iff u_n^n e^{-u_n} = 1$

$\iff e^{u_n} = u_n^n$

donc $n \ln(u_n) = u_n$

$\frac{u_n}{n} = \ln(u_n)$

donc $u_n = \exp\left(\frac{u_n}{n}\right)$

donc à la limite : $L = e^0 = 1$

(d) $f_n(v_{n-1}) = 1 - v_{n-1}^n e^{-v_{n-1}}$ or $f_{n-1}(v_{n-1}) = 0$ (de même)

donc $f_n(v_{n-1}) = v_{n-1}^{n-1} e^{-v_{n-1}} \left(1 - v_{n-1}\right) < 0$

or $f_n \Uparrow$ sur $[n, +\infty[$ et $v_n, v_{n-1} \geq n$ donc $v_{n-1} < v_n$

donc $(v_n) \uparrow$

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geq n$ donc par comparaison, $\lim v_n = +\infty$

B -

1.

(a) $\forall x \leq 0, \quad f_{2k}(x) = 1 - x^{2k} e^{-x}$

$$f'_{2k}(x) = -2k x^{2k-1} e^{-x} + x^{2k} e^{-x} = \underbrace{x^{2k-1} e^{-x}}_{\leq 0} \left(\underbrace{-2k + x}_{\leq 0} \right)$$

x	$-\infty$		0
$f'_{2k}(x)$		$+$	
f_{2k}	$-\infty$	$\nearrow$	1

$$f_{2k-1}(x) = 1 - x^{2k-1} e^{-x}$$

$$f'_{2k-1}(x) = -(2k-1) x^{2k-2} e^{-x} + x^{2k-1} e^{-x} = \underbrace{x^{2k-2} e^{-x}}_{\geq 0} \left(\underbrace{-(2k-1)}_{\leq 0.} + x \right)$$

x	$-\infty$		0
$f'_{2k-1}(x)$		$-$	
f_{2k-1}	$+\infty$	$\searrow$	1

(b) f_{2k-1} $\Downarrow$ sur $]-\infty, 0]$ donc $\forall x \leq 0,\ f_{2k-1}(x) \geq f(0) > 0$

donc (E_{2k-1}) n'a pas de racine négative

f_{2n} : Th de bijection sur $]-\infty,0]$ avec $f_{2n}(]-\infty,0]) =]-\infty,1]$
et $0 \in]-\infty,1]$.

donc (E_n) a des racines négatives ssi n est pair.

(2.)

(a) $f_{2n}(0) = 1 > 0$ et $f_{2n}(-1) = 1 - e < 0$

donc $f_{2n}(-1) < f_{2n}(w_n) < f_{2n}(0)$

et $f_{2n} \uparrow$ sur $]-\infty,0]$, $-1, w_n, 0 \in]-\infty,0]$

donc $-1 < w_n < 0$

$\forall n \geqslant 3$, $f_{2n}(w_{n-1}) = 1 - w_{n-1}^{2n} e^{-w_{n-1}}$

or $f_{2n-2}(w_{n-1}) = 0 \Leftrightarrow 1 - w_{n-1}^{2n-2} e^{-w_{n-1}} = 0$

donc $f_{2n}(w_{n-1}) = w_{n-1}^{2n-2} e^{-w_{n-1}} - w_{n-1}^{2n} e^{-w_{n-1}}$

$= \underbrace{w_{n-1}^{2n-2} e^{-w_{n-1}}}_{>0} \Big(\underbrace{1 - w_{n-1}^{2}}_{-1 < w_{n-1} < 0} \Big) > 0$

donc $w_{n-1}^2 < 1$

(b) $f_{2n}(w_{n-1}) > f_{2n}(w_n)$

or $f_{2n} \uparrow$ sur $]-\infty,0]$ et $w_{n-1}, w_n \leq 0$ donc $w_{n-1} > w_n$

donc $(w_n) \downarrow$

$(w_n) \downarrow$ et minorée (par -1) donc (w_n) converge vers L avec $-1 \leq L \leq 0$

or $\forall n$ $f_{2n}(w_n) = 0 \Leftrightarrow 1 - w_n^{2n} e^{-w_n} = 0$

$w_n^{2n} = e^{w_n}$

$(w_n^2)^n = e^{w_n}$ donc $(w_n^2)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^L$.

par l'absurde, <u>si $L \neq -1$</u> : $(w_n^2)^n = e^{n\ln(w_n^2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^L$ $\left(w_n < 0 \text{ donc } w_n^2 > 0 \right)$

donc $n\ln(w_n^2) \to L$. absurde.

or (w_n) ↓ donc $\forall n,\ w_n \leq w_0 < 0$

donc $L \leq w_0 < 0$ donc $n\ln(w_n^2) \to -\infty$

donc $-1 < L < 0$ donc $L^2 \in]0,1[$

donc $\boxed{L = -1}$

DS 7

Corrigé

On dispose de deux pièces indiscernables : l'une équilibrée et l'autre déséquilibrée qui donne Face avec la probabilité $p > \frac{1}{2}$. On effectue une série de lancers en choisissant l'une des deux pièces avant chaque lancer. Le but de ce DM est d'étudier plusieurs stratégies afin de trouver celle qui a le plus de chances d'obtenir Face à chaque lancer. Pour cela, on note pour tout $n \geqslant 1$:

- E_n l'événement "on choisit la pièce équilibrée au $n$ième lancer"
- F_n l'événement "on obtient Face au $n$ième lancer"

Préliminaire

E_n, $\overline{E_n}$ forment un sce donc par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(F_n) &= P_{E_n}(F_n) \times P(E_n) + P_{\overline{E_n}}(F_n) \times P(\overline{E_n}) \\ &= \frac{1}{2}\, P(E_n) + p\,(1 - P(E_n)) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{P(F_n) = p + \left(\frac{1}{2} - p\right) P(E_n)}$

Stratégie 1

Ici, $P(E_n) = \frac{1}{2}$ donc le préliminaire donne : $P(F_n) = p + \left(\frac{1}{2} - p\right) \frac{1}{2}$, soit : $\boxed{P(F_n) = \frac{2p+1}{4}}$

Stratégie 2

Au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable. Si on obtient Face, on continue d'utiliser la même pièce pour tous les lancers suivants. Sinon, on utilise l'autre pièce pour tous les lancers suivants.

1. Au premier lancer, d'après l'énoncé : $P(E_1) = \frac{1}{2}$, donc comme à la question précédente, $\boxed{P(F_1) = \frac{2p+1}{4}}$

2. Soit $n \geqslant 2$.

   - $P_{E_1}(E_n)$:
     E_1 est réalisé donc on a choisi la pièce équilibrée au premier lancer. Donc, selon cette stratégie, on continue d'utiliser cette pièce pour tous les lancers suivants ssi on a obtenu Face au premier lancer soit :
     $\boxed{P_{E_1}(E_n) = P_{E_1}(F_1) = \frac{1}{2}}$
   - $P_{\overline{E_1}}(E_n)$:
     $\overline{E_1}$ est réalisé donc on a choisi la pièce deséquilibrée au premier lancer. Donc, selon cette stratégie, on change de pièce pour tous les lancers suivants ssi on a obtenu Pile au premier lancer soit : $P_{\overline{E_1}}(E_n) = P_{\overline{E_1}}(\overline{F_1}) = 1 - P_{\overline{E_1}}(F_1)$.
     Conclusion : $\boxed{P_{\overline{E_1}}(E_n) = 1 - p}$

   Par la formule des probabilités totales ($\overline{E_1}$ et E_1 formant un sce), il vient :

   $$\begin{aligned} P(E_n) &= P_{E_1}(E_n) \times P(E_1) + P_{\overline{E_1}}(E_n) \times P(\overline{E_1}) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} + (1-p)\,\frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Soit $\boxed{P(E_n) = \frac{3-2p}{4}}$

3. On reprend le préliminaire, ce qui donne :

   $$P(F_n) = p + \left(\frac{1}{2} - p\right) \times \frac{3-2p}{4}$$

   Soit : $\boxed{P(F_n) = \frac{4p^2+3}{8}}$

4. Comparons $\dfrac{4p^2+3}{8}$ et $\dfrac{2p+1}{4}$:

$$\frac{4p^2+3}{8} - \frac{2p+1}{4} = \frac{4p^2+3-4p-2}{8} = \frac{4p^2-4p+1}{8} = \frac{(2p-1)^2}{8} > 0$$

Conclusion :

Pour le premier lancer, les stratégies 1 et 2 sont identiques. A partir du deuxième lancer, la stratégie 2 est meilleure que la première.

Stratégie 3

Au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard et de manière équiprobable. Puis, à chacun des lancers suivants, on utilise la même pièce que le lancer précédent si on a obtenu Face, sinon, on change de pièce.

1. Aux deux premiers lancers, les stratégies 2 et 3 sont les mêmes donc :

$$\boxed{P(F_n) = \frac{2p+1}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{P(F_2) = \frac{4p^2+3}{8}}$$

2. De la même façon qu'à la question 2 de la stratégie 2 (il faut juste remplacer E_1 par E_n), il vient :

$$P_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = 1-p$$

Donc par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E_{n+1}) &= \frac{1}{2} \times P(E_n) + (1-p) \times P(\overline{E_n}) \\ &= \frac{1}{2} \times P(E_n) + (1-p) \times (1-P(E_n)) \\ &= \left(p - \frac{1}{2}\right) P(E_n) + (1-p) \end{aligned}$$

Puisque $1 > p > \frac{1}{2}$, $p - \frac{1}{2} \in]0,1[$ et $p - \frac{1}{2}$ et $1-p$ ne dépendent pas de n,

conclusion : $\boxed{a = p - \frac{1}{2} \text{ et } b = 1-p}$

3. $(P(E_n))$ est une suite arithmético-géométrique. On résout :

$$x = ax + b \iff x = \frac{b}{1-a} \quad \text{car } a \neq 1$$

Donc la suite $\left(P(E_n) - \dfrac{b}{1-a}\right)$ est géométrique de raison a, donc : $\forall n \geqslant 1$, $P(E_n) = a^{n-1}\left(P(E_1) - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a}$.

Avec $P(E_1) = \dfrac{1}{2}$

Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ P(E_n) = a^{n-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}}$

4. Avec les valeurs de a et b, on a :

$$\frac{b}{1-a} = \frac{1-p}{1-p+\frac{1}{2}} = 2\,\frac{1-p}{3-2p}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{b}{1-a} = \frac{1}{2} - 2\,\frac{1-p}{3-2p} = \frac{1}{2}\,\frac{2p-1}{3-2p}$$

Donc la question précédente donne :

$$\begin{aligned} P(E_n) &= \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{2p-1}{3-2p} + 2\,\frac{1-p}{3-2p} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n-1} \frac{2p-1}{3-2p} + 2\,\frac{1-p}{3-2p} \\ &= \left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n} \frac{1}{3-2p} + 2\,\frac{1-p}{3-2p} \end{aligned}$$

Donc, d'après le préliminaire :

$$\begin{aligned}
P(F_n) &= p + \left(\frac{1}{2} - p\right) \left(\left(\frac{2p-1}{2}\right)^n \frac{1}{3-2p} + 2\,\frac{1-p}{3-2p}\right) \\
&= p - \frac{2p-1}{2} \left(\left(\frac{2p-1}{2}\right)^n \frac{1}{3-2p} + 2\,\frac{1-p}{3-2p}\right) \\
&= -\left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{3-2p} + \frac{p(3-2p) - (1-p)\,(2p-1)}{3-2p} \\
&= -\left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{3-2p} + \frac{1}{3-2p}
\end{aligned}$$

Soit : $\boxed{\forall n \geqslant 1,\ P(F_n) = \frac{1}{3-2p} \left(1 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1}\right)}$

5. On a déjà dit à la première question que les stratégies 2 et 3 sont les mêmes. Donc, $\forall n \geqslant 3$, comparons les :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3-2p} \left(1 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1}\right) - \frac{4p^2+3}{8} \\
=&\frac{1}{8\,(3-2p)} \left[8 - 8\left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} - (4p^2+3)\,(3-2p)\right] \\
=&\frac{1}{8\,(3-2p)} \left[-8\left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} + \left(8p^3 - 12p^2 + 6p - 1\right)\right] \\
=&\frac{1}{8\,(3-2p)} \left[-8\left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1} + (2p-1)^3\right] \\
=&\frac{(2p-1)^3}{8\,(3-2p)} \left[1 - \frac{2^3}{2^{n+1}}\,(2p-1)^{n-2}\right] \\
=&\frac{(2p-1)^3}{8\,(3-2p)} \left[1 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n-2}\right]
\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2} < p \leqslant 1$ donc $\frac{(2p-1)^3}{8\,(3-2p)} > 0$ et $\frac{2p-1}{2} < 1$ donc $\left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n-2} < 1$.

Conclusion : $\frac{1}{3-2p}\left(1 - \left(\frac{2p-1}{2}\right)^{n+1}\right) - \frac{4p^2+3}{8} > 0$, soit :

$\boxed{\text{à partir du troisième lancer, la stratégie 3 est meilleure que le deuxième}}$