Semaine 24 : 29 avril au 3 mai 2024

A. Espaces vectoriels

Note aux interrogateurs: on travaille exclusivement, pour l'instant, dans $\mathbb{K}^n$ ou $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

$*$ **Espace vectoriel:** définition, règle de calculs
$\rightarrow$ *espaces vectoriels "de référence":* $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ *(et aussi* $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, *etc ...)*
$*$ **Sous espace vectoriel:**
Définition: Soit E un espace vectoriel et $\boxed{F \subset E}$ On dit que F est un **sous espace vectoriel de** E (ou sev de E) ssi:
(1) $O_E \in F$ (le vecteur nul de E est dans F, O_E est donc aussi le vecteur nul de F)
(2) $\forall x, y \in F$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda\, x + \mu\, y \in F$ (F est stable par combinaison linéaire)
Intersection finie de sev; $\boxed{Vect < x_1, \ldots, x_k >:}$ (où $x_1, \ldots, x_k$ sont des vecteurs d'un ev E): définition, c'est le plus petit sev de E contenant la famille $\{x_1, \ldots, x_k\}$.
$*$ **Familles génératrices:** définition;
Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice;
Lemme de réduction: Si $E = Vect(x_1, \ldots, x_k, v)$ et si $v \in Vect(x_1, \ldots, x_k)$ alors $E = Vect(x_1, \ldots, x_k)$.
$*$ **Familles libres:** définition; famille liée, vecteurs linéairement indépendants: définitions;
Une famille est liée ssi l'au au moins de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille;
Toute famille contenant une sous-famille liée est liée;
Soit $(x_1, \ldots, x_k)$ une famille libre d'un ev E et $v \in E$ tel que $v \notin Vect(x_1, \ldots, x_k)$ alors la nouvelle famille $(x_1, \ldots, x_k, v)$ est libre.
$*$ **Bases:** définition (existence et unicité de la décomposition), la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E ssi elle est à la fois libre et génératrice de E; **coordonnées** dans une base.
$\rightarrow$ *bases canoniques de* $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$
$*$ **Dimension:** définition, dimension des ev de référence; Soit E un ev de dimension p.
Familles libres: toute famille libre a au plus p éléments, une famille libre ayant p éléments est une base, toute famille ayant (au moins) $p+1$ éléments est liée.
Familles génératrices: toute famille génératrice a au moins p éléments, une famille génératrice ayant p éléments est une base, toute famille ayant au plus $p-1$ éléments n'est pas génératrice de E.
Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension n.
Soient F et G deux sev de E tels que $F \subset G$, alors: $\dim F \leqslant \dim G$; et si $\dim F = \dim G$ alors $F = G$.
$*$ **Rang d'une famille de vecteurs:** définition; Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension n. Soit F un sev de E et $u_1, \ldots, u_p$ p vecteurs de F.
(1) $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre ssi $rg(u_1, \ldots, u_p) = p$.
(2) $(u_1, \ldots, u_p)$ engendre F (i.e $F = Vect(u_1, \ldots, u_p)$) ssi $rg(u_1, \ldots, u_p) = \dim F$.
(3) $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de F ssi $rg(u_1, \ldots, u_p) = \dim F = p$.
Capacités exigibles:

1. Montrer que E est un ev en montrant qu'il est le sev d'un ev de référence.
2. *Expression d'un ev:*
   équation(s) cartésienne(s) $\rightarrow$ famille génératrice
   famille génératrice $\rightarrow$ équation(s) cartésienne(s)
3. Montrer qu'une famille est libre / génératrice.
4. *Famille libre:* étude de la liberté d'une famille par un système linéaire homogène ou par la matrice associée (calcul du rang).
5. *Bases:*
   Montrer qu'une famille est une base,
   Donner les coordonnées de tout vecteur d'un ev dans une base.
6. *Donner une base d'un ev:*
   $\rightarrow$ à partir des équations cartésiennes,
   $\rightarrow$ ev engendré par une famille de vecteurs.
7. *Calcul du rang d'une famille de vecteurs:*
   $\rightarrow$ calcul du rang de la matrice qui représente la famille de vecteurs **dans une même base**.

B. Langage Python

Simulation d'expériences aléatoires , de marches aléatoires .

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question d'informatique (langage `python`) parmi , puis passage aux exercices :

1. On tire avec remise cinq boules d'une urne contenant dix boules numérotées de 1 à 10. Écrire un programme python qui renvoie le maximum des cinq numéros obtenus.

2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire trois boules de cette urne sans remise ($n \geqslant 3$). Écrire une fonction `tirage(n)` qui renvoie le résultat d'un tirage dans une liste.

3. Un mobile se déplace aléatoirement le long d'un axe horizontal d'origine 0, sur des points à coordonnées entières, positives ou nulles.
   Les déplacements sont effectués selon le protocole suivant:
   - à l'instant 0, le mobile est sur l'origine O d'abscisse 0.
   - si, pour tout entier naturel n, le mobile se trouve à l'instant n sur le point d'abscisse k ($0 \leqslant k \leqslant n$), alors il sera à l'instant $n+1$, soit sur le point d'abscisse $k+1$ avec la probabilité $\frac{1}{3}$, soit sur le point O avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

   Écrire un programme qui simule cette marche aléatoire et renvoie l'abscisse du mobile à l'instant n.

4. On dispose d'une pièce et d'un pion placé à l'origine d'un axe gradué. On lance n fois la pièce. A chaque lancer, on déplace le pion d'une unité vers la gauche si on obtient pile, d'une unité vers la droite si on obtient face.
   On note X_n l'abscisse du pion à la fin de l'expérience.
   Écrire une fonction qui simule l'expérience aléatoire et renvoie l'abscisse du pion à la fin de l'expérience.