Semaine 24 : 7 au 11 avril 2025

A. Fonctions : continuité (semaine 23)

B. Espaces vectoriels

Note aux interrogateurs: on travaille exclusivement, pour l'instant, dans $\mathbb{K}^n$ ou $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

$*$ **Combinaison linéaire de vecteurs**
$*$ **Espace vectoriel:** définition, règle de calculs
→ *espaces vectoriels "de référence":* $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ *(et aussi* $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, *etc ...)*
$*$ **Sous espace vectoriel:**
Définition: Soit E un espace vectoriel et $\boxed{F \subset E}$ On dit que F est un **sous espace vectoriel de** E (ou sev de E) ssi:
(1) $O_E \in F$ (le vecteur nul de E est dans F, O_E est donc aussi le vecteur nul de F)
(2) $\forall x, y \in F$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda\, x + \mu\, y \in F$ (F est stable par combinaison linéaire)
$*$ **Familles libres:** définition; famille liée, vecteurs linéairement indépendants: définitions;
Une famille est liée ssi l'un au moins de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille;
Toute famille contenant une sous-famille liée est liée;
Soit $(x_1, \ldots, x_k)$ une famille libre d'un ev E et $v \in E$ tel que $v \notin Vect(x_1, \ldots, x_k)$ alors la nouvelle famille $(x_1, \ldots, x_k, v)$ est libre.

C. Langage `python`

Tableaux : bibliothèque `numpy`; accès aux éléments, à la taille d'un tableau ; nombre de lignes / colonnes d'un tableau. Parcours de tableau (sur les indices).
Note aux colleurs : la création d'un tableau de "grande" taille n'est pas au programme de colles
Listes : tri par insertion

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question d'informatique (langage `python`) parmi :

1. Écrire une fonction `determinant(A)` qui pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, calcule et renvoie son déterminant.
2. Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle **trace de** A la somme de coefficients diagonaux de A, soit: $\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.
   Écrire une fonction `mattrace(A)` qui calcule la trace d'une matrice carrée A.
3. Écrire une fonction `moyenne(A)` qui renvoie la moyenne des coefficients du tableau `A`.
4. Tri par insertion : algorithme et explications sur un exemple.

Puis une question de cours parmi les suivantes, puis passage aux exercices :

1. Étude d'un prolongement par continuité en 0 de $(x \mapsto x^\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
2. Montrer le résultat suivant: si f continue sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors f est de signe constant sur I.
3. Soit : $\begin{array}{llll} g : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 + \ln x \end{array}$
   Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule sur $]0, +\infty[$, notée α. Montrer que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.
   On donne $0,69 < \ln 2 < 0,70$