Semaine 25 : 5 au 9 mai 2025

A. Espaces vectoriels

Note aux interrogateurs: on travaille exclusivement, pour l'instant, dans $\mathbb{K}^n$ ou $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$
À rajouter cette semaine :
Intersection finie de sev; $\boxed{Vect < x_1, \ldots, x_k >:}$ (où $x_1, \ldots, x_k$ sont des vecteurs d'un ev E): définition, c'est le plus petit sev de E contenant la famille $\{x_1, \ldots, x_k\}$.
$*$ **Familles génératrices:** définition;
Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice;
Lemme de réduction: Si $E = Vect(x_1, \ldots, x_k, v)$ et si $v \in Vect(x_1, \ldots, x_k)$ alors $E = Vect(x_1, \ldots, x_k)$.
$*$ **Bases:** définition (existence et unicité de la décomposition), la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E ssi elle est à la fois libre et génératrice de E; **coordonnées** dans une base.
$\to$ *bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$*
$*$ **Dimension:** définition, dimension des ev de référence; Soit E un ev de dimension p.
Familles libres: toute famille libre a au plus p éléments, une famille libre ayant p éléments est une base, toute famille ayant (au moins) $p+1$ éléments est liée.
Familles génératrices: toute famille génératrice a au moins p éléments, une famille génératrice ayant p éléments est une base, toute famille ayant au plus $p-1$ éléments n'est pas génératrice de E.
Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension n.
Soient F et G deux sev de E tels que $F \subset G$, alors: $\dim F \leqslant \dim G$; et si $\dim F = \dim G$ alors $F = G$.
$*$ **Rang d'une famille de vecteurs:** définition; Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension n. Soit F un sev de E et $u_1, \ldots, u_p$ p vecteurs de F.
(1) $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre ssi $rg(u_1, \ldots, u_p) = p$.
(2) $(u_1, \ldots, u_p)$ engendre F (i.e $F = Vect(u_1, \ldots, u_p)$) ssi $rg(u_1, \ldots, u_p) = \dim F$.
(3) $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de F ssi $rg(u_1, \ldots, u_p) = \dim F = p$.

Capacités exigibles:

1. Montrer que E est un ev en montrant qu'il est le sev d'un ev de référence.
2. *Expression d'un ev:*
   équation(s) cartésienne(s) $\to$ famille génératrice
   famille génératrice $\to$ équation(s) cartésienne(s)
3. Montrer qu'une famille est libre / génératrice.
4. *Famille libre:* étude de la liberté d'une famille par un système linéaire homogène ou par la matrice associée (calcul du rang).
5. *Bases:*
   Montrer qu'une famille est une base,
   Donner les coordonnées de tout vecteur d'un ev dans une base.
6. *Donner une base d'un ev:*
   $\to$ à partir des équations cartésiennes,
   $\to$ ev engendré par une famille de vecteurs.
7. *Calcul du rang d'une famille de vecteurs:*
   $\to$ calcul du rang de la matrice qui représente la famille de vecteurs **dans une même base**.

B. Langage `python`

Tableaux : bibliothèque `numpy`; accès aux éléments, à la taille d'un tableau ; nombre de lignes / colonnes d'un tableau. Parcours de tableau (sur les indices), fonction `zeros(( , ))`
Listes : tri par insertion; **Listes : tris par sélection**
Algorithme de dichotomie

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question d'informatique (langage `python`) parmi :

1. Écrire une fonction `matid` qui permette de construire la matrice identité de taille $n \times n$.
2. Écrire une fonction `transposee(A)` qui renvoie la transposée d'une matrice A.
3. Tri par insertion : algorithme et explications sur un exemple.
4. Tri par sélection *en place* : algorithme et explications sur un exemple.
5. Tri par sélection *non en place* : algorithme et explications sur un exemple.

Puis passage aux exercices