I. ESPACES VECTORIELS.

1) Pour trouver LA dimension d'un sp. vectoriel, on doit trouver :

2) Lire de deux façons différentes la phrase mathématique :

$$F = \mathrm{Vect}\langle u_1, u_2\rangle$$

3) On donne $F = \mathrm{Vect}\langle u_1, u_2\rangle$.

Peut-on écrire ... ? Sinon, corrigez :

(a) $u \in F \iff u = \mathrm{Vect}\langle u_1, u_2\rangle$

(b) tous les vecteurs de F sont engendrés par $\langle u_1, u_2\rangle$.

(c) $\langle u_1, u_2\rangle$ est une base de F.

(d) la famille $\langle u_1, u_2\rangle$ engendre F

(e) $rg\langle u_1, u_2\rangle = 2$ car $\langle u_1, u_2\rangle$ est libre

(f) $\langle u_1, u_2\rangle$ est libre donc c'est une base de F et $\dim F = 2$

(g) $rg\, F = 2 \iff \langle u_1, u_2\rangle$ est libre.

(h) tout vecteur de F se décompose de façon unique sur $\langle u_1, u_2\rangle$

(i) $\langle u_1, u_2\rangle$ est libre et sa dimension est 2 donc $\dim F = 2$

4) VRAI / FAUX ? Justifiez :

(a) Il n'y a jamais le vecteur nul dans une base

(b) Toutes les familles génératrices de $\mathcal{M}_{41}(\mathbb{K})$ ont au moins 4 vecteurs.

(c) Si les vecteurs d'une famille sont non colinéaires alors cette famille est libre.

II _ APPLICATIONS LINEAIRES.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. On note $A = \text{mat}(f)$

1) VRAI / FAUX ? Justifiez :

(a) $rg(f) = n$

(b) $\dim(\ker f) \leq p$

(c) $A \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$

(d) A ne dépend pas des bases $\mathcal{B}$ (de $\mathbb{K}^p$) et $\mathcal{C}$ (de $\mathbb{K}^n$)

(e) $rg(A)$ ne dépend pas des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

(f) f est surjective si tous les vecteurs de $\mathbb{K}^p$ ont une image.

(h) On note $\mathcal{B} = \langle u_1, \ldots, u_p \rangle$ base de $\mathbb{K}^p$.
Alors $\text{Im} f = \text{Vect}\langle u_1, \ldots, u_p \rangle$.

(i) On note $\text{Im} f = \text{Vect}\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
Donc $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ engendre f.

2) Que peut-on dire de f si... ?

(a) $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{K}^n$

(b) $\mathrm{Ker}\, f = \mathbb{K}^p$

(c) $\mathrm{Im}\, f = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

(d) $\mathrm{Ker}\, f = \{0_{\mathbb{K}^p}\}$.

Exercice . Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

a) Donner la matrice colonne des coordonnées des vecteurs suivants dans la base $\mathcal{B}$:

$$e_3, \qquad u = (2,1,3,4), \qquad e_2 - e_4.$$

b) Peut-on écrire e_1 comme combinaison linéaire de la famille (e_2, e_3, e_4) ?

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées de $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ pour que x admette une décomposition comme combinaison linéaire de la famille (e_2, e_3, e_4).

Exercice . Soit G le sous-espace vectoriel $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a + b - c + 2d = 0\}$. Soient $u = (1,0,1,0)$, $v = (0,1,1,0)$ et $w = (1,1,0,-1)$.

a) Montrer que (u, v, w) est une famille libre.

b) Montrer que $\mathrm{Vect}(u, v, w) = G$.

c) En déduire que (u, v, w) est une base de G et déterminer $\dim(G)$.

d) Montrer que $(0,1,3,1)$ appartient à G, puis décomposer ce vecteur dans la base (u, v, w).