DM 10 - Mardi 7/05
Corrigé

Exercice 1

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et la famille compte 3 vecteurs

donc (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi elle est libre ssi $rg(u, v, w) = 3$.

Matrice qui représente les vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 8 & 1 & \alpha \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$rg(M) = rg \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & \alpha-2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix}$$

$$= rg \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & \alpha-2 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$= rg \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha-12 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$$

Donc : $rg(u, v, w) = 3 \iff \alpha - 12 \neq 0$.

Conclusion : $\boxed{(u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ ssi } \alpha \neq 12}$

Exercice 2

(u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de G.

donc c'est une base de G ssi elle est libre

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ quelconques tq $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 11\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 11\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 5\lambda_1 \end{matrix} \quad \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 11\lambda_3 = 0. \\ -5\lambda_2 + (a-22)\lambda_3 = 0 \\ -15\lambda_2 - 45\lambda_3 = 0 \\ -19\lambda_2 - 57\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{15}L_3.}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 11\lambda_3 = 0 \\ -5\lambda_2 + (a-22)\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -19\lambda_2 - 57\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 11\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -5\lambda_2 + (a-22)\lambda_3 = 0. \\ -19\lambda_2 - 57\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 15L_2 \end{matrix} \quad (S) \left\{ \begin{array}{l} 1\lambda_1 + 4\lambda_2 + 11\lambda_3 = 0 \\ 1\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \boxed{(a-7)}\lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$

* si $a \neq 7$: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc (u_1, u_2, u_3) est libre

donc $\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } G \text{ et } \dim(G) = 3}$

* si $a = 7$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -4\lambda_2 - 11\lambda_3 = 29\lambda_3. \\ \lambda_2 = -3\lambda_3 \\ \lambda_3 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

donc $\forall \lambda_3 \in \mathbb{R}, \quad 29\lambda_3 u_1 - 3\lambda_3 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$

pour $\lambda_3 = 1$: $\quad 29u_1 - 3u_2 + u_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$

$$u_3 = -29u_1 + 3u_2$$

donc $G = \text{Vect}\langle u_1, u_2 \rangle$ avec $\langle u_1, u_2 \rangle$ libre

Conclusion $\boxed{\langle u_1, u_2 \rangle \text{ est une base de } G \text{ et } \dim(G) = 2}$

Exercice 3

$$F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 / a+b-c-d=0\}.$$

1.

- $0_{\mathbb{R}^4} \in F$ car $0+0-0-0=0$ ✓

- $\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, mq $\lambda u + \mu v \in F$.

$u = (x,y,z,t) \in F$ donc $x+y-z-t=0$

$v = (a,b,c,d) \in F$ donc $a+b-c-d=0$.

$$\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu a, \lambda y + \mu b, \lambda z + \mu c, \lambda t + \mu d)$$

avec : $(\lambda x + \mu a) + (\lambda y + \mu b) - (\lambda z + \mu c) - (\lambda t + \mu d)$

$= \lambda(x+y-z-t) + \mu(a+b-c-d)$

$= \lambda . 0 + \mu . 0 = 0$ ✓

Conclusion : F est un sev de $\mathbb{R}^4$

2.

$$u = (x,y,z,t) \in F \underset{\substack{\uparrow \\ x=-y+z+t}}{\iff} u = (-y+z+t, y, z, t)$$

$$\iff u = y\boxed{\underbrace{(-1,1,0,0)}_{u_1 \in F}} + z\boxed{\underbrace{(1,0,1,0)}_{u_2 \in F}} + t\boxed{\underbrace{(1,0,0,1)}_{u_3 \in F}}$$

$$\iff u \in \mathrm{Vect}\langle u_1, u_2, u_3\rangle.$$

donc $F = \mathrm{Vect}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

Matrice qui représente la famille dans la base canonique :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ et calcul du rang au brouillon.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ quelconques tq $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Donc la famille est libre.

Conclusion : $\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } F \text{ et } \dim(F) = 3}$

(3.) On note v_1, v_2, v_3 les vecteurs de G.

(v_1, v_2, v_3) est une famille génératrice de G.

Matrice qui représente la famille dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$rg(A) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1}}{=\!=} rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -8 & -14 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_4}}{=\!=} rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_2}}{=\!=} rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 5L_4 \\ L_4 \leftrightarrow L_3}}{=\!=} rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Donc la famille est libre. C'est une base de G et $\dim(G) = 3$