

Devoir Maison 11

À rendre lundi 27 mai 2024

Exercice 1 : On définit la fonction φ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que φ est continue sur \mathbb{R}_+ .
2. Montrer que φ est dérivable en 0 et préciser la valeur de $\varphi'(0)$.
3. Étudier φ sur \mathbb{R}_+ .
4. Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .
5. φ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+ ?

Exercice 2 : On considère l'application :

$$f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$$

On ADMET que : $e^x - 1 - x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur \mathbb{R} .
On continue d'appeler f ce prolongement
3. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} .
4. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{e^x - 1 - x}{(e^x - 1)^2} - \frac{x}{e^x - 1}$.
(b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{1}{2}$.
(c) La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?
5. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^* , et que :

$$\forall x \neq 0, f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} (xe^x - 2e^x + x + 2)$$

- (a) Étudier la fonction $g : x \mapsto xe^x - 2e^x + x + 2$ sur \mathbb{R} .
- (b) En déduire que : $\forall x \neq 0, f''(x) > 0$.
- (c) En déduire les variations de f .
6. (a) Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .
(b) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .