Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2023/2024
Mme MOREL

DS 8 – Mathématiques

Mercredi 15 mai 2024

Durée de l'épreuve : 1 heures 30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à $\boxed{\textbf{encadrer}}$, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de deux exercices de mathématiques .

Exercice 1. : Pour tout nombre réel a **non nul**, on note f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M_a = \begin{pmatrix} -1-a & a & 2 \\ -a & 1 & a \\ -2 & a & 3-a \end{pmatrix}$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.
   (a) Déterminer le rang, l'image et le noyau de $f_a - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
   (b) Déterminer le rang, l'image et le noyau de l'endomorphisme g dont la matrice dans la base canonique est :
   $$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (c) En déduire le rang, l'image et le noyau de $(f_a - (1-a)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^2$
2. Démontrer que $\mathcal{B} = ((1,1,1);(1,0,1);(1,1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et démontrer que la matrice T_a de f_a dans cette base est :
   $$T_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a-2 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

Exercice 2. : On considère :

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y+z+t=0\right\} \qquad G = \{(2a,-a,0,a) / a \in \mathbb{R}\}$$

1. Montrer que F et G sont des espaces vectoriels.
2. Déterminer base et dimension de F et G.
3. Montrer que $F \cap G = \{0\}$