DS 8 - Mathématiques.
15/05/2024

Exercice 1

1.

(a) Matrice de $f_a - id$ dans la base canonique :

$$M_a - I_3 = \begin{pmatrix} -2-a & a & 2 \\ -a & 0 & a \\ -2 & a & 2-a \end{pmatrix}$$

- $u = (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f_a - id) \iff (f_a - id)(x,y,z) = (0,0,0)$

$$\iff \begin{cases} (-2-a)x + ay + 2z = 0 \\ -ax + az = 0 \\ -2x + ay + (2-a)z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{a}L_2 \ (a \neq 0) \\ L_1 \leftrightarrow L_2}}{\iff} \begin{cases} x - z = 0 \\ (-2-a)x + ay + 2z = 0 \\ -2x + ay + (2-a)z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + (2+a)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}}{\iff} \begin{cases} x - z = 0 \\ ay - az = 0 \\ ay - az = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{a}L_2 \ (a \neq 0)}}{\iff} \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \iff u = z(1,1,1) \in \mathrm{Vect}((1,1,1))$$

donc $\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Ker}(f_a - id) = \mathrm{Vect}((1,1,1)) \\ \dim \mathrm{Ker}(f_a - id) = 1 \end{array}}$

$$\mathrm{Im}(f_a - id) = \mathrm{Vect}\Big((-2-a, -a, -2), (a, 0, a), (2, a, 2-a)\Big)$$

or $(a, 0, a) + (2, a, 2-a) = (2+a, a, 2) = -(-2-a, -a, -2)$

donc $\boxed{\mathrm{Im}(f_a - id) = \mathrm{Vect}\Big((a, 0, a), (2, a, 2-a)\Big) \underset{a\neq 0}{=} \mathrm{Vect}\Big((1, 0, 1), (2, a, 2-a)\Big)}$

vecteurs non colinéaires, donc la famille est libre et c'est une base de $\mathrm{Im}(f_a - id)$ donc $\boxed{rg(f_a - id) = 2}$

(b)

. $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Vect}\Big((-1, -1, -1), (1, 1, 1), (1, 1, 1)\Big) = \mathrm{Vect}\Big((-1, -1, -1), (1, 1, 1)\Big)$

$\boxed{\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 1)\big) \text{ donc } rg(g) = 1}$

. $u = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}\, g \Leftrightarrow g(u) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = y + z$$

$\Leftrightarrow u = (y+z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1)$

$\Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}\big((1, 1, 0), (1, 0, 1)\big)$

donc $\boxed{\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 0), (1, 0, 1)\big)}$

vecteurs non colinéaires donc famille libre donc c'est une base de $\mathrm{Ker}\, g$ et $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}\, g) = 2}$

(c) On calcule la matrice N_a de $(f_a - (1-a)\, id)^2$ dans la base canonique : $N_a = (M_a - (1-a) I)^2 = a^2 N$

donc $\underline{\left(f_a-(1-a)id\right)^2 = a^2 g}$.

. $u \in \mathrm{Ker}\left(\left(f_a-(1-a)id\right)^2\right) \Leftrightarrow a^2 g(u) = 0 \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} g(u) = 0$

$\Leftrightarrow u \in \mathrm{Ker}\, g$

donc $\boxed{\mathrm{Ker}\left(\left(f_a-(1-a)id\right)^2\right) = \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Vect}\left((1,1,0),(1,0,1)\right)}$

. $u \in \mathrm{Im}\left(\left(f_a-(1-a)id\right)\right)^2 \Leftrightarrow u \in \mathrm{Im}(a^2 g)$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^3 \ / \ u = a^2 g(x)$

$\Leftrightarrow$ —— $/ \ u = g(a^2 x)$ (g linéaire)

$\Leftrightarrow u \in \mathrm{Im}\, g$

donc $\boxed{\mathrm{Im}\left(\left(f_a-(1-a)id\right)^2\right) = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)}$

(2.) . $\mathcal{B}$ a 3 vecteurs et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi $rg(\mathcal{B}) = 3$.

Matrice qui représente $\mathcal{B}$ dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg(P) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=\!=} rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$$ donc $\underline{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

. $\mathrm{Ker}(f_a - id) = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)$ donc $\underline{f_a(1,1,1)} = (1,1,1) = \underline{(1,0,0)_{\mathcal{B}}}$.

. $M_a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ 0 \\ 1-a \end{pmatrix}$ donc $\underline{f_a(1,0,1)} = (1-a, 0, 1-a)$

$= 0(1,1,1) + (1-a)(1,0,1) + 0(1,1,0)$

$= \underline{(0, 1-a, 0)_{\mathcal{B}}}$

$$M_a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1-a\\-2+a\end{pmatrix}$$

donc $f_a(1,1,0)=(-1,1-a,-2+a)_{can}$

or $\underline{(a-2)}(1,0,1)+\underline{(1-a)}(1,1,0)=(a-2+1-a,1-a,a-2)_{can}$

$=(-1,1-a,a-2)$

donc $\underline{f_a(1,1,0)=(0,a-2,1-a)_{\mathcal{B}}}$

Conclusion : $\boxed{T_a=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1-a&a-2\\0&0&1-a\end{pmatrix}}$

Exercice 2

(1.) . $G=\{a(+2,-1,0,1)\ /a\in\mathbb{R}\}=Vect((2,-1,0,1))$

donc G est un espace vectoriel

. $0_{\mathbb{R}^4}=(0,0,0,0)\in F$ car $0+0+0+0=0$ ✓

. $\forall u,v\in F$, $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ mq $\lambda u+\mu v\in F$

$u=(x,y,z,t)$ avec $x+y+z+t=0$

$v=(a,b,c,d)$ avec $a+b+c+d=0$.

$\lambda u+\mu v=(\lambda x+\mu a,\lambda y+\mu b,\lambda z+\mu c,\lambda t+\mu d)$ avec

$(\lambda x+\mu a)+(\lambda y+\mu b)+(\lambda z+\mu c)+(\lambda t+\mu d)$

$=\lambda(x+y+z+t)+\mu(a+b+c+d)=\lambda.0+\mu.0=0$ ✓

Conclusion F est un sev de $\mathbb{R}^4$

(2.) . $\underline{\dim G = 1}$

. $u = (x,y,z,t) \in F \Leftrightarrow u = (-y-z-t, y, z, t)$

$x = -y-z-t$

$\Leftrightarrow u = y\underbrace{(-1,1,0,0)}_{u_1 \in F} + z\underbrace{(-1,0,1,0)}_{u_2 \in F} + t\underbrace{(-1,0,0,1)}_{u_3 \in F}$

$\Leftrightarrow u \in \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

donc $\underline{F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)}$

Soient $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ tq $\lambda u_1 + \mu u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda - \mu - \gamma = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = \gamma = 0$$

donc la famille est libre. C'est donc une base de F et $\underline{\dim F = 3}$.

(3.) $F \cap G$ est un espace vectoriel donc $\{0\} \subset F \cap G$.

$\forall u = (x,y,z,t) \in F \cap G$:

. $u \in G$ donc $\exists a \in \mathbb{R}$, $u = (2a, -a, 0, a)$

et . $u \in F$ donc $2a + (-a) + 0 + a = 0$

$\Leftrightarrow 2a = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$

donc $u = (0,0,0,0)$

Conclusion : $\underline{F \cap G = \{0\}}$.