Semaine 26 : 20 au 24 mai 2024

A. Algèbre linéaire : révisions des semaines précédentes

B. Dérivation

$*$ **Dérivée en un point:** définition; dérivée à gauche, à droite; Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.
$\rightarrow$ *Étude des fonctions valeur absolue et racine en* 0
$*$ Fonction dérivée; **dérivabilité d'un prolongement par continuité.**
$*$ **Opérations:** linéarité, produit, quotient, fonction composée, fonction réciproque: dérivée des fonctions racine $n$ième et Arctangente.
$*$ **Extremum local:** définition;
Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$ *qui n'est pas une extremité de* I.
Si f possède un extremum (local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.
Si $f'(x_0) = 0$ et si f' *change de signe en* x_0, alors f possède un extremum local en x_0.
$*$ Théorème de Rolle, Théorème des accroissements finis, Inégalité des accroissements finis.
$\rightarrow$ *A noter (programme officiel): "L'inégalité des accroissements finis peut être mentionnée mais n'est pas un attendu du programme"*
$*$ **Variations des fonctions dérivables:** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, f est croissante sur I ssi $f' \geqslant 0$ sur I; décroissante sur I ssi $f' \leqslant 0$ sur I; constante sur I ssi $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$; Si $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur I et ne s'annule qu'en un nombre *fini* de points, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.
$*$ **Étude complète de fonctions:**
ensemble de définition, variations, limites ; équation de la tangente en un point, recherche des tangentes horizontales ; allure graphique.
$*$ **Dérivées d'ordre supérieur:** Définition de $f^{(n)}$; fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$.
$\rightarrow$ Les fonctions $(x \mapsto x^n)$ $(n \in \mathbb{N})$, inverse, ln, exp, sin, cos sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et expression de leurs dérivées successives.
somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) et formule: pour tous λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
produit, composée, quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$).
$\rightarrow$ *A noter (programme officiel): "les formules de Taylor-Lagrange et de Leibniz sont hors-programme"*
$*$ **Fonction réciproque:** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, dont la dérivéef' **ne s'annule pas sur** I, alors f est bijective de I dans l'intervalle $J = f(I)$ et $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J)$.
$\rightarrow$ application aux fonctions arctan et racine n-ième.

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question de cours, puis passage aux exercices :

1. Étudier la dérivabilité de : $h(x) = \cos(\sqrt{x})$
2. On pose : $\forall t > 0$, $g(t) = \frac{1}{t}\, e^{-\frac{1}{t}}$.
   Montrer que g peut être prolongée par continuité en 0 en une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$.
3. Soit λ un réel non nul et f définie sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ par:
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\lambda x)-1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   Montrer que f est dérivable sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$.
4. Dérivabilité de la fonction Arctangente et calcul de sa dérivée.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan x + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dots$
6. Soit f définie sur $]0, +\infty[$ par: $f(x) = x - 2 + \ln x$.
   Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
   Montrer que f^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $(f^{-1})'(-1)$.
7. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln(n+1)$
8. Montrer que si une fonction est dérivable en un point, elle est continue. Étude de la réciproque.