Semaine 27 : 19 au 23 mai 2025

A. Fonctions réelles d'une variable réelle – DERIVATION

$*$ **Dérivée en un point:** définition; dérivée à gauche, à droite; Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.
$\rightarrow$ *Étude des fonctions valeur absolue et racine en* 0
$*$ Fonction dérivée; **dérivabilité d'un prolongement par continuité.**
$*$ **Opérations:** linéarité, produit, quotient, fonction composée, fonction réciproque: dérivée des fonctions racine $n$ième et Arctangente.
$*$ **Variations des fonctions dérivables:** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, f est croissante sur I ssi $f' \geqslant 0$ sur I; décroissante sur I ssi $f' \leqslant 0$ sur I; constante sur I ssi $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$; Si $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur I et ne s'annule qu'en un nombre *fini* de points, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.
$*$ **Étude complète de fonctions:**
ensemble de définition, variations, limites ; équation de la tangente en un point, recherche des tangentes horizontales ; allure graphique.
$*$ **Dérivées d'ordre supérieur:** Définition de $f^{(n)}$; fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$.
$\rightarrow$ Les fonctions $(x \mapsto x^n)$ $(n \in \mathbb{N})$, inverse, ln, exp, sin, cos sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et expression de leurs dérivées successives.
somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) et formule: pour tous λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
produit, composée, quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$).
$\rightarrow$ *A noter (programme officiel): "les formules de Taylor-Lagrange et de Leibniz sont hors-programme"*
$*$ **Fonction réciproque:** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, dont la dérivéef' **ne s'annule pas sur** I, alors f est bijective de I dans l'intervalle $J = f(I)$ et $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J)$.
$\rightarrow$ application aux fonctions arctan et racine n-ième.

B. Langage `python`

Simulation d'expériences aléatoires, marches aléatoires (import random as rd) :
fonctions `choice(L)`, `L.pop()`, `L.pop(k)`, `shuffle(L)` où L est une liste de nombres ;
fonctions `randrange(a,b)`, `randint(a,b)` où a et b sont des entiers avec $a < b$;
fonction `random()` ;
Valeur approchée d'une probabilité

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question d'informatique (langage `python`) parmi :

1. Lors d'un jeu, un candidat choisit une question en tirant au hasard un papier parmi trois. Il y a:

   • une question facile, pour laquelle on a 3 chances sur 4 de donner la réponse exacte,

   • une question moyenne, pour laquelle on a 2 chances sur 5 de donner la réponse exacte,

   • une question difficile, pour laquelle on a 1 chances sur 5 de donner la réponse exacte.

   Écrire une fonction `reponse()` qui renvoie `True` si le candidat donne la bonne réponse, `False` sinon.
   on pourra une variable qui vaut `0,1,2` *suivant le niveau de la question.*
   Écrire une fonction `proba` qui renvoie une valeur approchée de la probabilité de donner la bonne réponse.

2. Un mobile se déplace aléatoirement le long d'un axe horizontal d'origine 0, sur des points à coordonnées entières, positives ou nulles.
   Les déplacements sont effectués selon le protocole suivant:

   • à l'instant 0, le mobile est sur l'origine O d'abscisse 0.

   • si, pour tout entier naturel n, le mobile se trouve à l'instant n sur le point d'abscisse k $(0 \leqslant k \leqslant n)$, alors il sera à l'instant $n+1$, soit sur le point d'abscisse $k+1$ avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$, soit sur le point O avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.

   Écrire un programme qui simule cette marche aléatoire et renvoie l'abscisse du mobile à l'instant n.

3. Une compagnie aérienne étudie la réservation de l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour de l'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante: si la place est réservée le jour k, elle le sera le jour $k+1$ avec la probabilité $\dfrac{9}{10}$; si la place est libre le jour k, elle sera réservée le jour $k+1$ avec la probabilité $\dfrac{4}{10}$.
   Pour k entier positif, on note r_k la probabilité que la place soit réservée le jour k.

   Écrire une fonction `python etat(n)` qui renvoie l'état de la place (réservée ou libre) au jour `n`.
   On pourra prendre une variable qui vaut 1 *si la place est réservée,* 0 *sinon.*

   Écrire une fonction `proba(n,m)` qui calcule une valeur approchée de r_n (`m` étant le nombre de fois où on réalise l'expérience)

Puis passage aux exercices