Semaine 27 : 27 au 31 mai 2024

A. Dérivation

À rajouter cette semaine :
Étude de la convergence des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ en utilisant l'IAF, calculatrices autorisées pour les conjectures;
Remarque: Tous les résultats doivent savoir être redémontrés à chaque utilisation.
Soit f une fonction définie, continue et dérivable sur un intervalle I. On veut montrer que la suite (u_n) converge vers le réel ℓ (rappel: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$; et $\ell \in I$ est un point fixe de f)

∗ Si il existe $k \in]0,1[$ tel que $|f'(x)| \leqslant k$, $\forall x \in I$, alors: $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant k\,|u_n - \ell|$.
∗ Si il existe $k \in]0,1[$ tel que $|f'(x)| \leqslant k$, $\forall x \in I$, alors: $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant k^n\,|u_0 - \ell|$.
∗ On passe à la limite : par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

B. Variables aléatoires FINIES

∗ **VAR finie:** définition; s.c.e associé.
∗ **Loi de probabilité:** définition, loi d'une composée;
Soit $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ une partie finie de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$. f est une loi de probabilité ssi $\forall x \in A$, $f(x) \geqslant 0$ et $\sum\limits_{x\in A} f(x) = 1$.
∗ **Espérance:** définition
∗ **Lois usuelles:** VA certaine; loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, $n \in \mathbb{N}^*$ (définition, modèle probabiliste, espérance); lois de Bernoulli et Binômiale (définition, modèle probabiliste, espérance.

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question de cours, puis passage aux exercices :

1. On pose : $\forall t > 0$, $g(t) = \frac{1}{t}\,e^{-\frac{1}{t}}$.
   Montrer que g peut être prolongée par continuité en 0 en une fonction dérivable sur $[0,+\infty[$.
2. Dérivabilité de la fonction Arctangente et calcul de sa dérivée.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan x + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dots$
4. Soit f définie sur $]0,+\infty[$ par: $f(x) = x - 2 + \ln x$.

   Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

   Montrer que f^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $(f^{-1})'(-1)$.
5. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln(n+1)$
6. Montrer que si une fonction est dérivable en un point, elle est continue. Étude de la réciproque.
7. Écrire une fonction qui simule la loi binomiale de paramètres n, p.
8. Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$: définition, modèle probabiliste associé, calcul de l'espérance.
9. Loi de Bernoulli de paramètre p: définition, modèle probabiliste associé, calcul de l'espérance.
10. Loi binomiale de paramètre n, p: définition, modèle probabiliste associé, calcul de l'espérance.