Semaine 27 : 26 au 29 mai 2026

les programmes de colles précédents sont aussi à réviser ...

A. Applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$

Note aux interrogateurs : on étudie exclusivement les applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.

À rajouter cette semaine : $*$ **Image d'une application linéaire:** définition; sev de $\mathbb{K}^n$, CNS de surjectivité;
Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$ (pas forcément la base canonique!). Alors, $Imf = Vect\,(f(u_1), \dots, f(u_p))$

$*$ **Rang d'une application linéaire :** $rgf = \dim(Imf)$ (ne dépend pas du choix de la base); théorème du rang.

$*$ **Matrices et applications linéaires:**
matrice qui représente une application linéaire dans deux bases fixées;
calcul matriciel de $f(x)$ $\forall x \in \mathbb{K}^p$; (cohérence des bases)
matrice de la somme, de λf, composée de deux applications linéaires (cohérence des bases)
matrice de f^{-1}

Capacités exigibles :

1. Montrer qu'une application est linéaire.
2. former la matrice d'une application linéaire dans deux bases fixées (pas forcément canoniques)
3. calculer le noyau, l'image, le rang d'une application linéaire.
4. Utilisation de matrices pour la bijectivité, le calcul de f^{-1} et les opérations (polynômes d'endomorphismes par exemple).

C. Langage `Python`

Simulation d'expériences aléatoires avec loi uniforme.

Déroulement de la colle :

1. Une question de cours parmi :
   (a) Montrer que $\ker f$ est un sev de $\mathbb{K}^p$
   (b) Montrer que Imf est un sev de $\mathbb{K}^n$
   (c) Donner la définition de rgf et énoncer le théorème du rang. En déduire que si $n = p$, f est bijective ssi f est surjective ssi f est injective.
   (d) Montrer que $\ker f = \{0_p\}$ ssi f est injective.
2. une question d'informatique parmi
   (a) On tire avec remise cinq boules d'une urne contenant dix boules numérotées de 1 à 10. Écrire un programme qui renvoie le maximum des cinq numéros obtenus.
   (b) Soit N un entier supérieur à 10. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire au hasard et simultanément 10 boules de l'urne. Écrire un programme qui renvoie le minimum des dix numéros obtenus.
   (c) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire trois boules de cette urne sans remise (on suppose que $n \geqslant 3$).
   • Écrire une fonction `tirage(n)` qui renvoie le résultat d'un tirage dans une liste, c'est-à-dire la liste des trois boules obtenues.
   • Écrire une fonction `test(n)` qui teste si 2 est le plus petit numéro sorti.