Semaine 28 : 8 au 12 juin 2026

les programmes de colles précédents sont aussi à réviser ...

A. Fonctions réelles d'une variable réelle – DERIVATION

$*$ **Dérivée en un point:** définition; dérivée à gauche, à droite; Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.
$\rightarrow$ *Étude des fonctions valeur absolue et racine en* 0
$*$ Fonction dérivée; **dérivabilité d'un prolongement par continuité.**
$*$ **Opérations:** linéarité, produit, quotient, fonction composée, fonction réciproque: dérivée des fonctions racine $n$ième et Arctangente.
$*$ **Étude complète de fonctions:**
ensemble de définition, variations, limites ; équation de la tangente en un point, recherche des tangentes horizontales ; allure graphique.
$*$ **Dérivées d'ordre supérieur:** Définition de $f^{(n)}$; fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$.
$\rightarrow$ Les fonctions $(x \mapsto x^n)$ $(n \in \mathbb{N})$, inverse, ln, exp, sin, cos sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et expression de leurs dérivées successives.
somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) et formule: pour tous λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
produit, composée, quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) est de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$).
$\rightarrow$ *A noter (programme officiel): "les formules de Taylor-Lagrange et de Leibniz sont hors-programme"*
$*$ **Fonction réciproque:** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, dont la dérivéef' **ne s'annule pas sur** I, alors f est bijective de I dans l'intervalle $J = f(I)$ et $f^{-1} \in \mathcal{C}^n(J)$.
$\rightarrow$ application aux fonctions arctan et racine n-ième.

B. Langage `Python`

Simulation d'expériences aléatoires , valeur approchée de probabilité ; marches aléatoires.

Déroulement de la colle :

1. une question d'informatique parmi :

   (a) Un mobile se déplace aléatoirement le long d'un axe horizontal d'origine 0, sur des points à coordonnées entières, positives ou nulles.
   Les déplacements sont effectués selon le protocole suivant:
   - à l'instant 0, le mobile est sur l'origine O d'abscisse 0.
   - si, pour tout entier naturel n, le mobile se trouve à l'instant n sur le point d'abscisse k $(0 \leqslant k \leqslant n)$, alors il sera à l'instant $n+1$, soit sur le point d'abscisse $k+1$ avec la probabilité $\frac{1}{3}$, soit sur le point O avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

   Ecrire un programme `python` qui simule cette marche aléatoire et renvoie l'abscisse du mobile à l'instant n.

   (b) Une compagnie aérienne étudie la réservation de l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour de l'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante: si la place est réservée le jour k, elle le sera le jour $k+1$ avec la probabilité $\frac{9}{10}$; si la place est libre le jour k, elle sera réservée le jour $k+1$ avec la probabilité $\frac{4}{10}$.
   Pour k entier positif, on note r_k la probabilité que la place soit réservée le jour k.
   Écrire une fonction `python etat(n)` qui renvoie l'état de la place (réservée ou libre) au jour `n`.
   Écrire une fonction `proba(n,m)` qui calcule une valeur approchée de r_n (`m` étant le nombre de fois où on réalise l'expérience)

   (c) On étudie le mouvement aléatoire d'une puce qui se déplace sur les sommets d'un triangle ABC.
   A l'instant 0, la puce est en A et se déplace selon les règles suivantes:
   - si à l'instant n, la puce est en A, alors à l'instant $n+1$, elle passe en B avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et en C avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
   - si à l'instant n, la puce est en B, alors à l'instant $n+1$, elle passe en A ou C de façon équiprobable.
   - si à l'instant n, la puce est en C, alors à l'instant $n+1$, elle y reste.

   Écrire une fonction `marche(n)` qui simule cette marche aléatoire et qui renvoie la position de la puce à l'instant n.
   On note l'événement $A_n =$"la puce est en A à l'instant n".
   Écrire une fonction `proba(n,m)` qui renvoie une valeur approchée de $P(A_n)$. (m est le nombre de fois que l'on réalise l'expérience.)

2. Puis une question de cours parmi :

   (a) Énoncer le théorème donnant la dérivabilité de la fonction récipriouqe f^{-1}, et l'appliquer à la fonction Arctangente.

   (b) Étude graphique des fonctions puissances réelles $x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \neq 0)$ en 0.

(c) Classe et dérivées n-ième (avec preuve) de la fonction exponentielle.

(d) Classe et dérivées n-ième (avec preuve) de la fonction inverse.

(e) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.
(on admet que $E(XY) = E(X)\,E(Y)$)

(f) Montrer par récurrence que la somme de n va de Bernoulli indépendantes de paramètre p suit une binomiale de paramètres n, p.