**Semaine 28 : 2 au 6 juin 2025**

## A. Fonctions réelles d'une variable réelle – DERIVATION

À rajouter cette semaine :
∗ **Extremum local:** définition;
Soient $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $x_0 \in I$ *qui n'est pas une extremité de* $I$.
Si $f$ possède un extremum (local) en $x_0$ alors $f'(x_0) = 0$.
Si $f'(x_0) = 0$ et si $f'$ *change de signe en* $x_0$, alors $f$ possède un extremum local en $x_0$.
∗ Théorème de Rolle, Théorème des accroissements finis, Inégalité des accroissements finis.
→ *A noter (programme officiel): "L'inégalité des accroissements finis peut être mentionnée mais n'est pas un attendu du programme"*
**Étude de la convergence des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ en utilisant l'IAF,** calculatrices autorisées pour les conjectures;
*Remarque: Tous les résultats doivent savoir être redémontrés à chaque utilisation.*
Soit $f$ une fonction définie, continue et dérivable sur un intervalle $I$. On veut montrer que la suite $(u_n)$ converge vers le réel $\ell$ (rappel: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$; et $\ell \in I$ est un point fixe de $f$)
∗ Si il existe $k \in ]0,1[$ tel que $|f'(x)| \leqslant k$, $\forall x \in I$, alors: $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant k\,|u_n - \ell|$.
∗ Si il existe $k \in ]0,1[$ tel que $|f'(x)| \leqslant k$, $\forall x \in I$, alors: $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant k^n\,|u_0 - \ell|$.
∗ On passe à la limite : par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

## B. Variables aléatoires FINIES

∗ **VAR finie:** définition; s.c.e associé.
∗ **Loi de probabilité:** définition, loi d'une composée;
Soit $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ une partie finie de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$. $f$ est une loi de probabilité ssi $\forall x \in A$, $f(x) \geqslant 0$ et $\sum\limits_{x\in A} f(x) = 1$.
∗ **Espérance:** définition; propriétés (linéarité, positivité, croissance; Si $X \geqslant 0$ et $E(X) = 0$ alors $P(X = 0) = 1$); formule du transfert. → *VA centrée*
∗ **Variance:** définition; $V(aX + b) = a^2\,V(X)$; **Écart-type:** définition; $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$. → *VA réduite*
∗ Moments d'ordre $r$, $r \in \mathbb{N}^*$: définition.
∗ **Lois usuelles:** VA certaine; loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ , $n \in \mathbb{N}^*$ (définition, modèle probabiliste, espérance); lois de Bernoulli et Binômiale (définition, modèle probabiliste, espérance, somme de $n$ Bernoulli indépendantes et de même paramètre),
→ *A noter (programme officiel): "la formule de la variance d'une variable de loi uniforme n'est pas un attendu du programme"*

## C. Langage `python`

**Simulation d'expériences aléatoires, marches aléatoires ( import random as rd)**; **Valeur approchée d'une probabilité**

## Déroulement de la colle :

**La colle commence par une question d'informatique (langage `python`) parmi :**

1. Un mobile se déplace aléatoirement le long d'un axe horizontal d'origine 0, sur des points à coordonnées entières, positives ou nulles.
Les déplacements sont effectués selon le protocole suivant:
• à l'instant 0, le mobile est sur l'origine O d'abscisse 0.
• si, pour tout entier naturel $n$, le mobile se trouve à l'instant $n$ sur le point d'abscisse $k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, alors il sera à l'instant $n + 1$, soit sur le point d'abscisse $k + 1$ avec la probabilité $\frac{1}{3}$, soit sur le point O avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
Écrire un programme qui simule cette marche aléatoire et renvoie l'abscisse du mobile à l'instant $n$.

2. Une compagnie aérienne étudie la réservation de l'un de ses vols. Une place donnée est libre le jour de l'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante: si la place est réservée le jour $k$, elle le sera le jour $k + 1$ avec la probabilité $\frac{9}{10}$; si la place est libre le jour $k$, elle sera réservée le jour $k + 1$ avec la probabilité $\frac{4}{10}$.
Pour $k$ entier positif, on note $r_k$ la probabilité que la place soit réservée le jour $k$.
Écrire une fonction `python etat(n)` qui renvoie l'état de la place (réservée ou libre) au jour `n`.
*On pourra prendre une variable qui vaut* 1 *si la place est réservée,* 0 *sinon.*
Écrire une fonction `proba(n,m)` qui calcule une valeur approchée de $r_n$ (`m` étant le nombre de fois où on réalise l'expérience)

3. Écrire une fonction `Binomiale(n,p)` qui simule la loi binomiale de paramètres $n, p$.