Semaine 28 : 3 au 7 juin 2024

A. Variables aléatoires FINIES

À rajouter cette semaine :
∗ **Fonction de répartition:** définition, représentation graphique;
Soit X une v.a finie. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Alors: $f_X(x_1) = F_X(x_1)$ et $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $f_X(x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$
→ *loi d'un max/min*
→ *A noter (programme officiel): "les propriétés générales des fonctions de répartition (continuité à droite, limites ...) ne sont pas au programme"*
∗ **Indépendance :** de deux VAR, mutuelle, ;
Indépendance mutuelle implique indépendance deux à deux ; étude de la réciproque,
X et Y sont indépendantes ssi pour tout $A \subset X(\Omega)$, pour tout $B \subset Y(\Omega)$, $P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$;
Si X et Y sont indépendantes alors pour toute application $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
∗ **Espérance:** définition; propriétés (linéarité, positivité, croissance; Si $X \geqslant 0$ et $E(X) = 0$ alors $P(X = 0) = 1$); formule du transfert. → *VA centrée*
∗ **Variance:** définition; $V(aX + b) = a^2\, V(X)$; **Écart-type:** définition; $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$. → *VA réduite*
∗ Moments d'ordre r, $r \in \mathbb{N}^*$: définition.
∗ **Lois usuelles:** VA certaine; loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, $n \in \mathbb{N}^*$ (définition, modèle probabiliste, espérance); lois de Bernoulli et Binômiale (définition, modèle probabiliste, espérance, somme de n Bernoulli indépendantes et de même paramètre),
→ *A noter (programme officiel): "la formule de la variance d'une variable de loi uniforme n'est pas un attendu du programme"*

B. Langage Python

Simulation des lois usuelles Uniforme, Bernoulli, Binomiale.
Valeur approchée de l'espérance d'une variable aléatoire.

Déroulement de la colle :

La colle commence par une question d'informatique (langage `python`) parmi :

1. Écrire une fonction qui simule la loi binomiale de paramètres n, p.
2. Écrire une fonction qui simule la loi de Bernoulli de paramètre p.
3. Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ de gauche à droite. Une puce part de la case numéro 0 et se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Les déplacements successifs de la puce sont indépendants.
   Soit X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.
   Écrire une fonction python `variable(n)` qui simule cette expérience et renvoie la valeur de X_n.
   Écrire une fonction python `esperance(n,m)` qui calcule une valeur approchée de l'espérance de X_n.
4. Une entreprise souhaite recruter un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0, 1[$. On pose également $q = 1 - p$.
   On définit la variable aléatoire X par :

   $X = k$ si le $k$ième candidat réussit le test,

   $X = n + 1$ si personne n'est engagé.
   Écrire une fonction python `variable(n,p)` qui simule cette expérience et renvoie la valeur de X.
   Écrire une fonction python `esperance(n,p,m)` qui calcule l'espérance de X.

Puis un calcul de primitive simple (cf exercice 1 fiche 34) :

le calcul est formel : on ne précisera pas l'intervalle où la fonction est continue.

Puis une question parmi les suivantes avant de passer aux exercices :

1. Loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$: définition, modèle probabiliste associé, calcul de l'espérance.
2. Loi de Bernoulli de paramètre p: définition, modèle probabiliste associé, calcul de l'espérance.
3. Loi binomiale de paramètre n, p: définition, modèle probabiliste associé, calcul de l'espérance.
4. Montrer que: $E(aX + b) = aE(X) + b$, où X est une v.a, a et b sont deux réels.
5. Formule de Koenig-Huygens , avec preuve.
6. Soit $a \leqslant X \leqslant b$. Montrer que $a \leqslant E(X) \leqslant b$.