Devoir Maison 12

À rendre vendredi 7 juin 2024

Exercice 1.

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$F(x) = \begin{vmatrix} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{3} & \text{si } -2 \leqslant x < 1 \\ \frac{2}{5} & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 2 \end{vmatrix}$$

1. Tracer la courbe représentative de F.
2. Soit X une variable aléatoire ayant F pour fonction de répartition. Calculer $P(X \leqslant 0)$.
3. Calculer $P(X = 1)$.
4. Déterminer la loi de X.

Exercice 2.

On lance un dé équilibré au plus cinq fois en s'arrêtant dès que l'on a obtenu 6. On note Y le nombre de lancers effectués. Déterminer la loi de Y.

Exercice 3.

Lors d'une séance de penaltys, cinq joueurs tirent successivement, indépendamment les uns des autres. On suppose qu'ils ont tous une probabilité $\frac{2}{3}$ de marquer.

1. Donner la loi du nombre de pénaltys marqués par l'équipe.
2. Quelle est la probabilité que l'équipe réussisse exactement trois penaltys ?
3. Combien, en moyenne, l'équipe réussira -t-elle de penaltys ?

Exercice 4.

Un jeu vidéo comporte N phases de jeu : niveau 1, niveau 2, ... niveau N. On suppose que N est un entier au moins égal 3. Le jeu commence au niveau 1. Ensuite, il faut réussir un niveau pour passer au suivant et ainsi de suite jusqu'au dernier niveau.

Le jeu s'arrête si l'on a échoué à l'un des niveaux ou si l'on a réussi tous les niveaux.

On suppose en outre que, lorsqu'on parvient au niveau k ($k = 1, 2, ..., N$), la probabilité de réussir ce *kème* niveau est égale $1/k$.

On désigne par X_N la variable aléatoire suivante :

"Nombre de niveaux entièrement franchis au moment où le jeu s'arrête".

Ainsi, pour $k = 1, 2, ..., N-1$, l'événement $(X_N = k)$ signifie que l'on a échoué au niveau $k+1$, et l'événement $(X_N = N)$ que l'on est vainqueur du jeu.

1. (a) Écrire un programme Python permettant de simuler cette expérience aléatoire et renvoyant la valeur de X_N.
   (b) Écrire un programme Python simulant m fois cette expérience (avec $m \in \mathbb{N}^*$) et renvoyant une valeur approchée de $E(X_N)$. Puis émettre une conjecture sur la limite de $E(X_N)$ quand N tend vers $+\infty$.
2. Déterminer la loi de X_N.