Exercice 1

(1.) . φ est continue sur $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions continues.

. en 0 : par C.C, $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln(x) = 0$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 1 = \varphi(0)$

donc φ continue en 0.

. Conclusion : φ est continue sur $\mathbb{R}_+$

(2.) $\forall x>0,\quad \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \dfrac{1-x^2\ln(x)-1}{x} = -x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \in \mathbb{R}$

donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0)=0$

(3.) φ est dérivable sur $]0,+\infty[$, $\forall x>0$,

$\varphi'(x) = -2x\ln(x) - x^2\times\frac{1}{x} = -2x\ln(x) - x$

$= -x\left(2\ln(x)+1\right)$

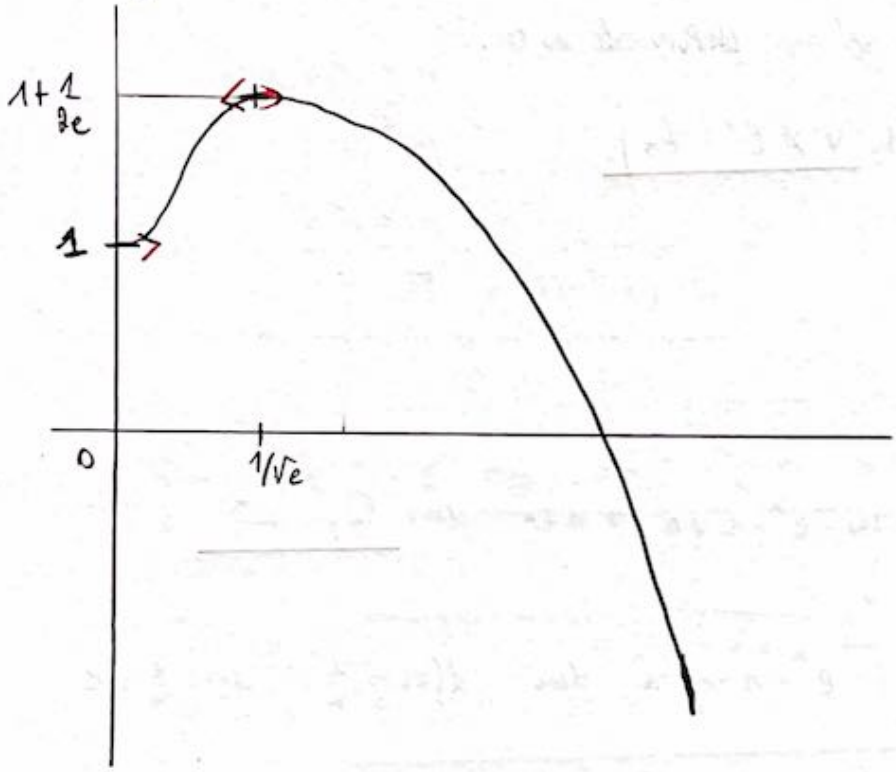
x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$	0	$+$	0	$-$	
φ	1	$\nearrow$	$1+\frac{1}{2e}$	$\searrow$	$-\infty$

$\varphi(e^{-1/2}) = 1-\left(e^{-1/2}\right)^2\ln(e^{-1/2}) = 1-e^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 1+\frac{1}{2e}$

en $+\infty$.

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{1-x^2\ln(x)}{x} = \frac{1}{x} - x\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

donc $\mathcal{C}_f$ admet une B.P verticale.



(4.) • Par produit de fonctions $\mathcal{C}^1$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[)$

• en 0 : • $\forall x \geq 0$, $\varphi'(x) = \begin{cases} -2x\ln x - x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} \varphi'(x) = 0 = \varphi'(0)$ donc φ' continue en 0.

Donc φ' continue sur $\mathbb{R}_+$

donc $\underline{\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)}$

(5.) En 0 : $\forall x > 0$, $\frac{\varphi'(x) - \varphi'(0)}{x - 0} = \frac{-2x\ln(x) - x}{x} = -2\ln(x) - 1 \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$

donc φ' non dérivable en 0.

donc $\varphi \notin \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$

Exercice 2

(1.) $f(x)$ existe ssi $e^x - 1 \neq 0 \iff x \neq 0$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

(2.) En 0 : $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ donc $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{x}$ avec $\frac{x}{x} = 1$

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$

donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$

(3.) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fct° dérivables.

en 0 : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} = \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \underset{0}{\sim} \frac{x - e^x + 1}{x^2}$

or $e^x - 1 - x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ donc $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{0}{\sim} -\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}$

avec $-\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

donc f dérivable en 0 avec $f'(0) = -\frac{1}{2}$ donc f dérivable sur $\mathbb{R}$

4. (a) $\forall x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{1\times(e^x-1) - x\times e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{(e^x-1-x) + (x - x e^x)}{(e^x-1)^2}$$

$$= \frac{e^x-1-x}{(e^x-1)^2} - \frac{x(e^x-1)}{(e^x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x-1-x}{(e^x-1)^2} - \frac{x}{(e^x-1)} \quad ✓$$

(b) • $\dfrac{x}{e^x-1} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x-1} = 1$

• $\dfrac{e^x-1-x}{(e^x-1)^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{1}{2}$

donc $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

(c) • $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^*)$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^2$
• f dér sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = -1/2$
• en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\frac{1}{2} = f'(0)$ donc f' continue en 0

donc f' continue sur $\mathbb{R}$

• Donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

5. Par quotient de fonctions $\mathcal{C}^2$, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$

$\forall x \neq 0, \quad f'(x) = \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{e^x(1-x) - 1}{(e^x-1)^2}$

donc $f''(x) = \dfrac{\left[e^x(1-x) - e^x\right](e^x-1)^{\cancel{2}} - \left[e^x(1-x)-1\right] 2\cancel{(e^x-1)}e^x}{(e^x-1)^3}$

$$f''(x) = \frac{1}{(e^x-1)^3}\left[(\cancel{e^x} - xe^x \cancel{- e^x})(e^x-1) - 2e^x\left(e^x - xe^x - 1\right)\right]$$

$$= \frac{e^x}{(e^x-1)^3} \cdot \left[-x(e^x-1) - 2\left(e^x - xe^x - 1\right)\right]$$

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^3}\left[xe^x - 2e^x + x + 2\right]$$

(a) $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = e^x + xe^x - 2e^x + 1$$
$$g'(x) = xe^x - e^x + 1$$
$$g''(x) = xe^x + e^x - e^x = xe^x.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
g'		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

En $+\infty$: $g(x) = e^x(x-2) + x + 2$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

En $-\infty$:

par C.C, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$
$(e^x-1)^3$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$		$+$
f'	-1 $\nearrow$		0
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$ $\searrow$		0

En $+\infty$: • $f'(x) = \dfrac{\cancel{e^x}(1-x) - 1/x)}{e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1-x-1/x}{e^x}$

$= \dfrac{1}{e^x} - xe^{-x} - \dfrac{1}{xe^x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par CC

• $f(x) \sim \dfrac{x}{e^x}$ donc par C.C, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

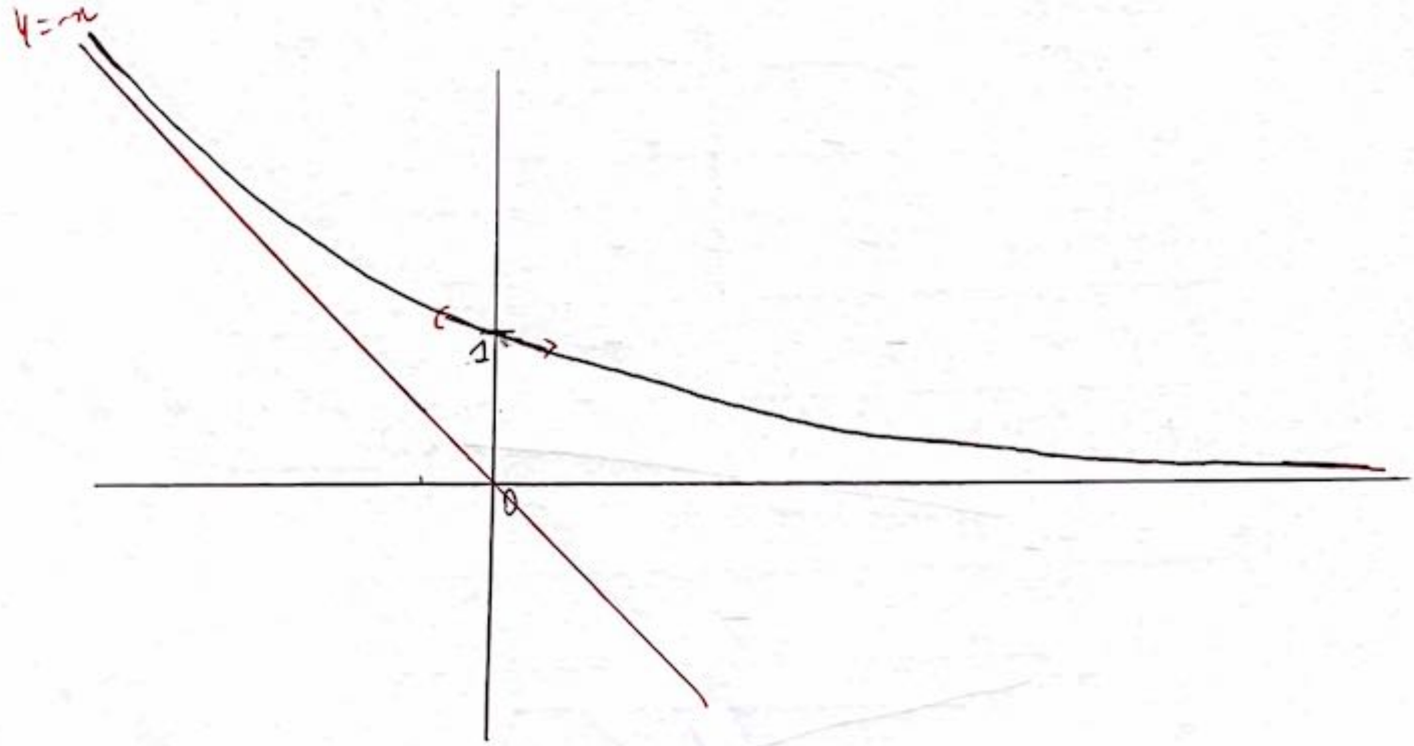
$\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale $y = 0$.

En $-\infty$:

$\cdot \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{e^x - 1} \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1$

$\cdot \quad f(x) + x = \frac{x}{e^x - 1} + x = \frac{x e^x \cancel{- x + x}}{e^x - 1} = \frac{x e^x}{e^x - 1} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$ par C.C

donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique : $y = -x$



$f'(0) = -\frac{1}{2}$

en $-\infty$: $e^x - 1 < 0$ car $e^x \to 0$ donc $e^x < 1$

et $x e^x < 0$ donc $f(x) + x > 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de son asymptote