Sommes de Riemann sur $[0,1]$

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Sommes de Riemann sur $[0,1]$

1.1 Définition

1.1.1 Subdivision de $[0,1]$

On découpe l'intervalle $[0,1]$ selon une subdivision à pas constant.

Exemple 1 :
(1)

La famille $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ qui vérifie $0 < \frac{1}{2} < 1$ est une subdivision régulière (à pas constant $\frac{1}{2}$) du segment $[0,1]$.
remarque: cette subdivision de **trois** *points découpe* $[0,1]$ *en* **deux** *sous-segments de même longueur* $\frac{1}{2}$*)*

(2)

La famille $\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$ qui vérifie $0 < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} < 1$ est une subdivision régulière (à pas constant $\frac{1}{3}$) du segment $[0,1]$.
remarque: cette subdivision de **quatre** *points découpe* $[0,1]$ *en* **trois** *sous-segments de même longueur* $\frac{1}{3}$*)*

(3) Proposer une subdivision régulière de $[0,1]$ qui divise ce segment en quatre sous-segments de même longueur:

(4) Plus généralement: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La famille $\{\quad, k \in [|0,n|]\}$ telle que $0 < \ldots < \ldots < \ldots < \ldots < 1$ est une subdivision régulière de $[0,1]$ à pas constant $\ldots$, qui découpe le segment $[0,1]$ en $\ldots$ segments de même longueur $\ldots$

1.1.2 Intuition géométrique (méthode des rectangles “à gauche” et “à droite”)

Exemple 2 Fonction carré sur $[0,1]$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On prend une subdivision régulière de $[0,1]$ à pas constant $\frac{1}{n}$.
On note $S_n(f)$ **la somme des aires des rectangles “à gauche”**, i.e de base $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ et de hauteur $\ldots\ldots$ qui est la

valeur à gauche de l'intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$.

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \sum_{k=} \underbrace{\Delta_k}_{\text{Aire d'un rectangle à "gauche"}} \\ &= \sum_{k=} (\ldots\ldots\ldots) \times (\ldots)^2 \\ &= \ldots \times \sum_{k=} f(\ldots) \,. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(f)$ vérifie: $S_n(f) = \qquad \left(\leqslant \int_0^1 f(t)\,dt\right)$.

De même, on note $R_n(f)$ **la somme des aires des rectangles "à droite"**, i.e de base et de hauteur ... qui est la valeur à droite de l'intervalle ...

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \sum_{k=} \underbrace{\Delta'_k}_{\text{Aire d'un rectangle à "droite"}} \\ &= \sum_{k=} (\ldots\ldots\ldots) \times (\ldots)^2 \\ &= \ldots \times \sum_{k=} f(\ldots) \,. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(f)$ vérifie: $R_n(f) = \qquad \left(\geqslant \int_0^1 f(t)\,dt\right)$.

1.1.3 Définition

Définition 1 *Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
On appelle **sommes de Riemann de f sur** $[0,1]$ *les expressions:*

Somme de Riemann à gauche: $\boxed{S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)}$

Somme de Riemann à droite: $\boxed{R_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}$

1.2 Convergence

1.2.1 Intuition géométrique

Exemple 3 :

On remarque que plus n est grand, plus la subdivision est fine et plus la somme des aires des rectangles est proche de l'intégrale cherchée:

Théorème 1 *Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, alors:*

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)}_{S_n(f)} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}_{R_n(f)} \,.$$

1.2.2 Application: limites de suites définies par une somme

Exemple 4 Calculer la limite de $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\ln(1+\frac{k}{n})}{k+n}$.

Exemple 5 Calculer la limite de $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$.

1.2.3 Langage PYTHON : méthode des rectangles

Établir une démarche informatique permettant de calculer une intégrale $\displaystyle\int_0^1 f$, où f est une fonction continue sur le segment $[0,1]$.