Vecteurs aléatoires

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Variables aléatoires indépendantes

Rappel 1 Soient deux v.a finies X et Y sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque $\forall x \in X(\Omega)$, $\forall y \in Y(\Omega)$,

$$P\left((X=x)\cap(Y=y)\right) = P(X=x)\,P(Y=y)\,.$$

Proposition 1 *Si X et Y sont indépendantes, alors $E(X\,Y) = E(X)\,E(Y))$ et $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$.*

Preuve:

■

2 Généralisation à n variables aléatoires

2.1 Définition

Définition 1 *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, un espace probabilisable fini et $n \geqslant 1$. On appelle vecteur aléatoire tout n-uplet $(X_1, X_2, \dots X_n)$ tel que pour tout $k \in [|1, n|]$, X_k est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.*

2.2 Mutuelle Indépendance

Définition 2 *Soit $(X_1, X_2, \dots X_n)$ un vecteur aléatoire fini.*
On dit que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** *ssi*
pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)\times \dots \times X_n(\Omega)$,

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)\dots P(X_n = x_n)\,.$$

Proposition 2 **(admise):** *Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors toute sous-famille l'est aussi.*

Remarque 1 Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors en considérant des sous-familles particulières, elles sont indépendantes deux à deux.
ATTENTION!! La réciproque est fausse.
contre-exemple: considérons X et Y indépendantes et de même loi uniforme sur $\{0, 1\}$, et $Z = |X - Y|$.

Proposition 3 **(admise):**
(1) Si $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+p}$ sont mutuellement indépendantes alors $u(X_1, \ldots, X_n)$ et $v(X_{n+1}, \ldots, X_{n+p})$ sont indépendantes.
(2) Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors $u_1(X_1), u_2(X_2), \ldots, u_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Exemple 1 : Somme de n v.a de Bernoulli indépendantes et de même paramètre
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n v.a de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Alors $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
Preuve: par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

$\underline{n = 1}$:

Hérédité: soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Montrons que $S_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n + 1, p)$.

■

Remarque 2 Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors X a même loi qu'une somme de n v.a indépendantes de loi $\mathcal{B}(1, p)$.
On retrouve donc la variance de X: