Chapitre 24: Fonctions réelles de deux variables réelles

INTRODUCTION:

En physique ou en SVT, on est parfois amené à considérer des phénomènes, résultats de plusieurs facteurs:
$*$ La croissance d'une plante dépend de son apport en eau, lumière, air, sels minéraux ...
$*$ L'équation d'état d'un gaz parfait $PV = nRT$: la pression d'une quantité donnée de gaz parfait dépend du volume dans lequel il se trouve et de la température ambiante.

1 Ensemble de définition

Définition 1 :
On appelle fonction numérique de deux variables réelles toute application $f : D \to \mathbb{R}$, où D est une partie de $\mathbb{R}^2$.
D est appelé ensemble (ou domaine) de définition de f.

Rappel 1 :
(1) Equation d'une droite: $\mathcal{D} : y = ax + b$, où:
• $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, où A et B sont deux points de la droite $\mathcal{D}$. a est le coefficient directeur ou pente de $\mathcal{D}$.
• b est l'ordonnée à l'origine

(2) Résolution graphique d'inégalités dans $\mathbb{R}^2$:
Exemple: $y + x + 1 \geqslant 0$.
Etape 1: On trace la droite d'équation $y + x + 1 = 0$ (on remplace $\geqslant$ par $=$):

$(y + x + 1 = 0 \iff y = -x - 1)$
Etape 2: On sélectionne la partie du plan solution (on vérifie sur un point).
Etape 3: ATTENTION: Cas particulier du BORD.
$*$ inégalité large $\Rightarrow$ droite $\mathcal{D}$ incluse.
$*$ inégalité stricte $\Rightarrow$ droite $\mathcal{D}$ exclue.

(3) Equation d'un cercle:
$x^2 + y^2 = R^2$ est l'équation du cercle de centre l'origine et de rayon $R > 0$.
Plus généralement: $\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \text{ est l'équation du cercle de centre } A(a, b) \text{ et de rayon } R > 0}$

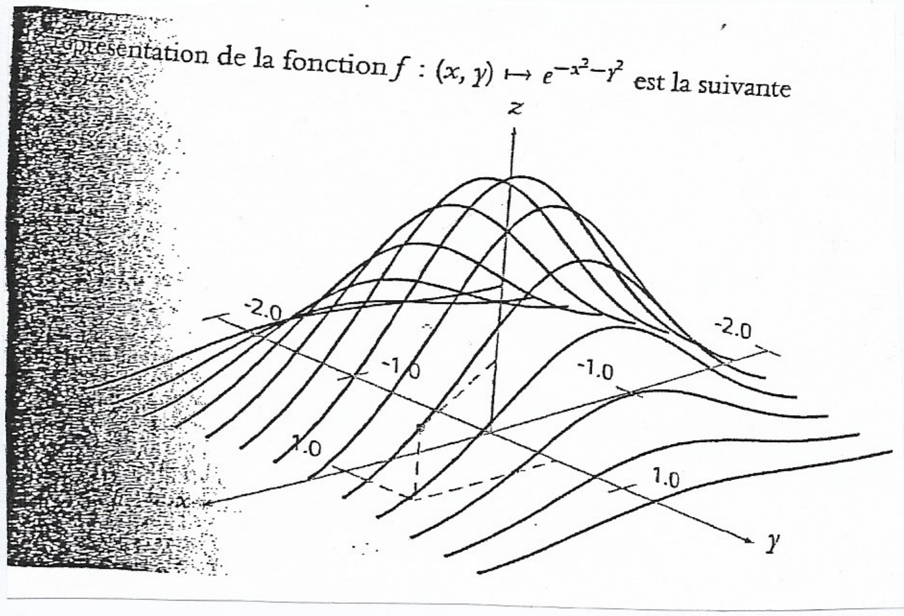
Donc $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant R^2\}$ est le disque de centre $A(a, b)$ et de rayon $R > 0$, bord ($=$ cercle) inclus.

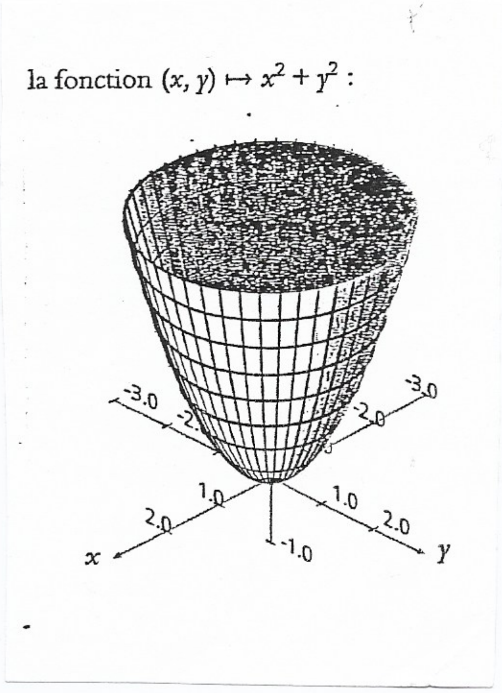
Exemple 1 Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes (en donner sa représentation graphique):

(1) $f(x,y) = \cos(xy)$.
(2) $g(x,y) = \ln(x+y)$.
(3) $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
(4) $U(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
(5) $V(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$.
(6) $W(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

2 Représentation graphique

On peut représenter graphiquement f dans l'espace par l'ensemble des points de coordonnées (x,y,z) tels que $(x,y) \in \mathcal{D}_f$ et $z = f(x,y)$.
f est alors représentée par une <u>surface</u>.





Définition 2 Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$\forall c \in \mathbb{R}$, on appelle <u>ligne de niveau c</u> l'ensemble $\boxed{N_c = \{(x,y) \in D / f(x,y) = c\}}$

Remarque 1 Graphiquement, la courbe de niveau c est l'intersection du graphe de f avec le plan d'équation $z = c$.
Etudier les courbes de niveau d'une fonction est une manière de visualiser son graphe.

Exemple 2 :

(1) $f(x,y) = x + 3y$.
(2) $g(x,y) = x^2 + y^2$.
(3) $U(x,y) = e^{-x^2-y^2}$.

3 Continuité

Rappel 2 Cas d'une fonction d'une variable réelle: f est continue en x_0 ssi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Comment étendre la notion de limite à $\mathbb{R}^2$? Revenons aux voisinages.

Voisinage d'un point (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$:

Rappel 3 Cas d'une fonction d'une variable réelle:
f est continue en x_0 ssi pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de $f(x_0)$, il existe un voisinage V_0 de x_0 tel que: si $x \in V_0 \cap \mathcal{D}_f$ alors $f(x) \in \mathcal{V}$.
Comment étendre la notion de continuité dans $\mathbb{R}^2$?

Notion de continuité:

→ *Graphiquement: pas de déchirure dans la surface...*

4 Dérivées partielles

4.1 Dérivées partielles d'ordre 1 et applications

4.1.1 Définition

Définition 3 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$, où D est une partie de $\mathbb{R}^2$. On peut définir deux applications partielles:*
(1) Pour y fixé, $f_y(x) = f(x, y)$ est une fonction définie sur $\{x \in \mathbb{R}/(x, y) \in D\}$.

(2) Pour x fixé, $f_x(y) = f(x, y)$ est une fonction définie sur $\{y \in \mathbb{R}/(x, y) \in D\}$.

Exemple 3 :
(1) $f(x, y) = e^{xy} + y^2 - 1$, où $D = \mathbb{R}^2$.
(2) $g(x, y) = \ln(x + y)$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x + y > 0\}$.

$*$ La tangente Γ_0 d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ donne une "bonne" approximation de la courbe C_f d'équation $y = f(x)$ au voisinage de $A_0 = (x_0, f(x_0))$.

$*$ $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$ quand x "proche" de x_0.

$\to$ A la physicienne: une petite variation de la valeur de f autour de x_0 découle d'une petite variation sur la variable x.

$$\underbrace{\delta f}_{f(x)-f(x_0)} = f'(x_0)\underbrace{\delta x}_{x-x_0}.$$

Et pour les fonctions de deux variables?

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$, et f une fonction de classe C^1 sur D. Peut-on estimer la variation $f(x_0 + h, y_0 + k)$ pour h et k "petits"?

- La courbe C_f devient une ...
- La tangente (droite) devient un ...

L'idée est donc d'approcher la par un ... :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \approx \underbrace{f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{\text{plan tangent en } (x_0, y_0)}.$$

$\to$ A la physicienne: $\delta f = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\delta y$.

une petite variation de la valeur de f découle de petites variations sur les variables.

Exemple 6 $f(x, y) = x^2\, e^{x+2y-1}$.

La variation locale peut être représentée par un vecteur:

Définition 6 *Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $(x_0, y_0) \in D$.*
On appelle gradient de f en (x_0, y_0) le vecteur $\overrightarrow{grad}_{(x_0,y_0)}(f)$ défini par:

$$\boxed{\overrightarrow{grad}_{(x_0,y_0)}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)}$$

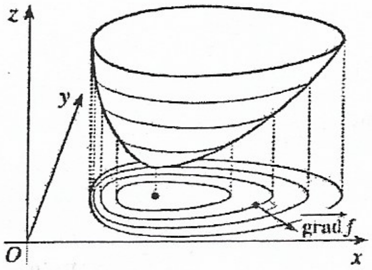
Remarque 3 On peut réécrire la petite variation de f sous forme de produit scalaire (repère orthonormal, coordonnées cartésiennes): $f(x_0 + h, y_0 + k) = \overrightarrow{grad}_{(x_0,y_0)}(f) \cdot (h, k)$.

Interprétation du gradient

Le gradient permet de « visualiser » les variations d'une fonction à l'aide des lignes de niveau.

En effet, la dérivée de f suivant un vecteur orthogonal au gradient est nulle. C'est la direction de la tangente à la ligne de niveau de f passant par (α, β). On peut donc retenir le résultat suivant.

> En tout point (α, β) le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}_{(\alpha,\beta)}(f)$ est normal à la ligne de niveau $f(x, y) = k$ où $k = f(\alpha, \beta)$.



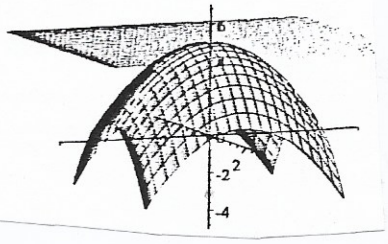
Cela s'interprète géométriquement par le fait que la direction du gradient indique la direction suivant laquelle f varie le plus vite, la norme du gradient mesurant l'intensité de cette variation. Par exemple, si f est l'altitude en un point (x, y), $\overrightarrow{\text{grad}}_{(x,y)}(f)$ est le vecteur orienté dans la direction de la ligne de plus grande pente, de norme égale à la pente locale. Au contraire, si on se déplace orthogonalement au gradient, f ne varie pas : on suit une ligne de niveau.

4.1.4 Extremum d'une fonction de deux variables

Théorème 1 *Si f est de classe C^1 sur $D =]a,b[\times]c,d[$ et admet en $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ un extremum, alors:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0\,.$$

Graphiquement, la fonction f admet un extremum local en (α, β) si la surface représentant f reste localement en dessous ou au dessus du plan d'équation $z = f(\alpha, \beta)$.



Preuve:

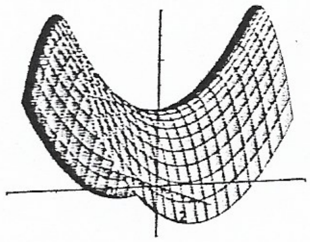
■

Remarque 4 ATTENTION!! La condition d'annulation des dérivées partielles d'ordre 1 est nécessaire mais non suffisante...

Attention ! Les dérivées partielles peuvent s'annuler en un point qui n'est pas un extremum local.

Il se peut en effet que l'une des dérivées partielles admette un maximum local et l'autre un minimum local et donc que f n'admettent pas d'extremum local. C'est le cas pour la fonction $(x, y) \longmapsto x^2 - y^2$ (représentée ci-contre) dont le graphe est en forme de selle de cheval : en $(0, 0)$, le gradient s'annule sans que la surface ne présente d'extremum local.

Un point où les deux dérivées partielles sont nulles s'appelle un point critique de f. Un point critique n'est donc pas toujours un extremum local.



Exemple 7 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$

4.2 Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 7 *Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$.*
On suppose que f admet deux dérivées partielles d'ordre 1 en tout point de D, c'est-à-dire les deux applications partielles f_x

et f_y sont dérivables.
Si, de plus, les nouvelles fonctions f'_x et f'_y (qui sont elles-même des fonctions de deux variables) admettent à leur tour des dérivées partielles, on les appelle dérivées partielles d'ordre 2 et on les note de la façon suivante:
(Pour x fixé:)

$$\begin{array}{rcl} f_x : D_x & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f(x,y) \end{array} \quad \text{où } D_x = \{y \in \mathbb{R}/(x,y) \in D\}, \quad f'_x(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \qquad \boxed{f''_x(y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)}$$

De même, (pour y fixé:)

$$\begin{array}{rcl} f_y : D_y & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x,y) \end{array} \quad \text{où } D_y = \{x \in \mathbb{R}/(x,y) \in D\}, \quad f'_y(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \qquad \boxed{f''_y(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)}$$

Dérivées croisées:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)} \text{ et } \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)}$$

Exemple 8 $f(x,y) = x^2\, e^{x+2y-1}$ et $g(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Remarque 5 On peut définir la classe $\mathcal{C}^2$: f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D si ses derivées partielles jusqu'à l'ordre 2 existent et sont continues sur D. L'ensemble de ces fonctions est noté $\boxed{\mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})}$

Remarque 6 ATTENTION À L'ORDRE!! On n'a pas toujours $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$...

***Théorème 2* (admis): Théorème de Schwarz**
Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et f de classe $\mathcal{C}^2$ sur D. Alors les dérivées partielles croisées sont égales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,.$$