Fonctions réelles de deux variables

I. Calcul de dérivées partielles.

Exercice 1 Calculer, quand elles existent, les dérivées partielles des fonctions:
$a(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$ $\quad b(x,y) = x^2 y \cos(2x+y)$ $\quad c(x,y) = \sqrt{y - \dfrac{1}{2}}\ \ln(1 - x^2 - y^2)$
$f(x,y) = x^2 y^2 \arctan\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)$ $\quad g(x,y) = x^{(y^x)}$ $\quad h(x,y) = ye^{-(x^2+y)}$.

Exercice 2 Soit V une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée de la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par:

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ \Phi(t) = V\left(t^2+1, e^t + \ln t - 1\right)\,.$$

II. Recherche d'extremum.

Exercice 3 On considère la fonction $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$.

1. Calculer les dérivées partielles de f.
2. Montrer qu'il existe un unique couple (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0\,.$$

3. Étudier le signe du trinôme $X^2 + X + 1$.
4. En remarquant que $x^2 + xy + y^2 = y^2\left((\dfrac{x}{y})^2 + \dfrac{x}{y} + 1\right)$ quand $y \neq 0$,
montrer que $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Interpréter ce résultat.

Exercice 4 On pose $f(x,y) = 4x^2 - 2xy + 7y^2 + 4$.

1. Déterminer les dérivées partielles de f.
2. Montrer que f admet un unique point critique (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$ que l'on déterminera.
3. Étudier le signe du trinôme $4\,X^2 - 2X + 7$.
4. En déduire que (x_0,y_0) est un minimum de f.

Exercice 5 Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto e^{x+y} - x^2 - y$ admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 Soit T l'ensemble des couples (x,y) de réels solutions du système d'inéquations $x \geqslant \dfrac{1}{4}$, $y \geqslant \dfrac{1}{4}$, $x + y \leqslant \dfrac{3}{4}$.
On note T' l'intérieur de T, à savoir les couples (x,y) de réels solutions du système d'inéquations $x > \dfrac{1}{4}$, $y > \dfrac{1}{4}$, $x+y < \dfrac{3}{4}$.
Soit f la fonction définie sur T par: $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{x+y}$.

1. Représenter sur un même graphique T et T'.
2. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur T' de f.
3. Montrer que f n'a pas de point critique sur T'.

Exercice 7

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x} \end{array}$$

Établir que l'équation $e^{-x} = x$ admet une solution et une seule sur $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe un unique point critique (x_0,y_0), et établir:

$$\begin{cases} x_0 - e^{-x_0} = 0 \\ y_0 = \frac{x_0}{2} \end{cases}$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f en (x_0, y_0).

Exercice 8 :

1. On considère l'application φ définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x}$$

   (a) Dresser le tableau de variations de φ sur $]0, +\infty[$.

   (b) On rappelle que $\ln 2 \simeq 0,69$.
   Montrer qu'il existe deux réels α et β, et deux seulement, tels que :

$$\varphi(\alpha) = 0 = \varphi(\beta) \quad \text{et} \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta$$

2. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par :

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x+4y} \ln(xy)$$

   (a) Prouver que pour tout x et y strictement positifs,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{x+4y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4\,f(x, y) + \frac{1}{y}\,\mathrm{e}^{x+4y}$$

   (b) Montrer que les points de coordonnées $\left(\alpha, \frac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \frac{\beta}{4}\right)$ sont les seuls points critiques de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Exercice 9 Soit f la fonction de deux variables définie sur $U =]1, +\infty[\times]0, \frac{1}{2}[$ par:

$$f(x, y) = x\,y\,(1 - 2y)^{x-1}\,.$$

1. Montrer que f admet en tout point de U des dérivées partielles premières. Les calculer et les factoriser.

2. Montrer que $\forall u \in]0, 1[$, $\ln(1 - u) < -u$.
   En déduire que f n'a pas de point critique sur U.