Semaine 29 : 15 au 19 juin 2026

les programmes de colles précédents sont aussi à réviser ...

A. Fonctions réelles d'une variable réelle – DERIVATION

À rajouter cette semaine :
$*$ **Variations des fonctions dérivables:** Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, f est croissante sur I ssi $f' \geqslant 0$ sur I; décroissante sur I ssi $f' \leqslant 0$ sur I; constante sur I ssi $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$; Si $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur I et ne s'annule qu'en un nombre *fini* de points, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.
$*$ **Extremum local:** définition;
Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$ *qui n'est pas une extremité de* I.
Si f possède un extremum (local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.
Si $f'(x_0) = 0$ et si f' *change de signe en* x_0, alors f possède un extremum local en x_0.
$*$ Théorème de Rolle, Théorème des accroissements finis, Inégalité des accroissements finis.
→ *A noter (programme officiel): "L'inégalité des accroissements finis peut être mentionnée mais n'est pas un attendu du programme"*
Étude de la convergence des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ en utilisant l'IAF, calculatrices autorisées pour les conjectures;
Remarque: Tous les résultats doivent savoir être redémontrés à chaque utilisation.
Soit f une fonction définie, continue et dérivable sur un intervalle I. On veut montrer que la suite (u_n) converge vers le réel ℓ (rappel: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$; et $\ell \in I$ est un point fixe de f)
$*$ Si il existe $k \in]0,1[$ tel que $|f'(x)| \leqslant k$, $\forall x \in I$, alors: $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant k\,|u_n - \ell|$.
$*$ Si il existe $k \in]0,1[$ tel que $|f'(x)| \leqslant k$, $\forall x \in I$, alors: $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant k^n\,|u_0 - \ell|$.
$*$ On passe à la limite : par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

B. Calcul intégral

$*$ **PrimitiveS d'une fonction continue:** définition; théorème d'existence (admis); infinité de primitives, deux primitives diffèrent à une constante près; primitives de $f + g$ et $\lambda\, f$.
Note aux colleurs : pour l'instant, une fonction continue c'est "on ne lève pas le stylo" ...
→ **Capacités exigibles (programme officiel): primitives usuelles et calcul simple de primitives.**
$*$ **Intégrale d'une fonction continue f sur un segment $[a, b]$:** F étant une primitive (quelconque) de f sur $[a, b]$, on pose le nombre réel $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$. (ne dépend pas du choix de la primitive); lien avec la notion d'aire pour une fonction continue.
$*$ **Propriétés de l'intégrale:** linéarité, relation de Chasles.
→ **Capacités exigibles (programme officiel): calculer une intégrale au moyen d'une primitive.**

C. Langage `Python`

Simulation d'expériences aléatoires , valeur approchée de probabilité ; marches aléatoires.
Valeur approchée d'espérance d'une variable aléatoire.

Déroulement de la colle :

1. une question d'informatique parmi :

   (a) Une entreprise souhaite recruter un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0,1[$. On pose également $q = 1 - p$.
   On définit la variable aléatoire X par :
   $X = k$ si le $k$ième candidat réussit le test,
   $X = n + 1$ si personne n'est engagé.
   Écrire une fonction python `variable(n,p)` qui simule cette expérience et renvoie la valeur de X.
   Écrire une fonction python `esperance(n,p,m)` qui calcule l'espérance de X.

   (b) Un rat de laboratoire est soumis à l'expérience suivante:
   il est enfermé dans une cage comportant quatre portes, derrière lesquelles se trouve un morceau de gruyère. Trois des quatre portes sont munies d'un dispositif envoyant au rat une décharge électrique s'il essaye de les franchir; la quatrième laisse le passage libre.
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués par le rat jusqu'à ce qu'il trouve la bonne porte.
   On suppose que le rat n'a pas de mémoire: il ne se souvient pas des portes où il a eu des échecs.
   On suppose que le rat abandonne au bout de 20 essais.
   Écrire une fonction Python qui simule l'expérience aléatoire et renvoie le nombre d'essais effectués par le rat

jusqu'à ce qu'il trouve la bonne porte.
(on pose $X = 0$ si le rat n'a jamais trouvé) Écrire une fonction Python qui calcule une valeur approchée de $E(X)$.

(c) Un rat de laboratoire est soumis à l'expérience suivante:
il est enfermé dans une cage comportant quatre portes, derrière lesquelles se trouve un morceau de gruyère. Trois des quatre portes sont munies d'un dispositif envoyant au rat une décharge électrique s'il essaye de les franchir; la quatrième laisse le passage libre.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués par le rat jusqu'à ce qu'il trouve la bonne porte.
On suppose que le rat n'a pas de mémoire: il ne se souvient pas des portes où il a eu des échecs.

On suppose que le rat n'abandonne jamais.
Écrire une fonction Python qui simule l'expérience aléatoire et renvoie le nombre d'essais effectués par le rat jusqu'à ce qu'il trouve la bonne porte.
Écrire une fonction Python qui calcule une valeur approchée de $E(X)$.

(d) On étudie le mouvement aléatoire d'une puce qui se déplace sur les sommets d'un triangle ABC.
A l'instant 0, la puce est en A et se déplace selon les règles suivantes:

- si à l'instant n, la puce est en A, alors à l'instant $n+1$, elle passe en B avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$ et en C avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.
- si à l'instant n, la puce est en B, alors à l'instant $n+1$, elle passe en A ou C de façon équiprobable.
- si à l'instant n, la puce est en C, alors à l'instant $n+1$, elle y reste.

Écrire une fonction `marche(n)` qui simule cette marche aléatoire et qui renvoie la position de la puce à l'instant n.

On note l'événement $A_n =$"la puce est en A à l'instant n".
Écrire une fonction `proba(n,m)` qui renvoie une valeur approchée de $P(A_n)$. (m est le nombre de fois que l'on réalise l'expérience.)

2. puis le calcul d'une intégrale par primitive.

3. etc ...