Intégration sur un segment

BCPST 1C – Mme MOREL

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1.1 Rappels

Définition 1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On dit que F* **est une primitive de** f **sur** I *si F est dérivable sur I et $F' = f$.*

Théorème 1 **(théorème d'existence), admis:** *Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.*

Proposition 1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. f admet une infinité de primitives sur I; deux primitives diffèrent à une constante près.*
En d'autres termes: soit F une primitive de f sur I (théorème d'existence). Alors l'ensemble des primitives de f sur I est de la forme: $\{F + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Proposition 2 *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, admettant respectivement F et G comme primitive sur I. Alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λF est une primitive de λf sur I.*

Définition 2 *Soient f une fonction continue sur un intervalle I, $a, b \in I$. Soit F une primitive (quelconque) de f sur I.*
On appelle **intégrale de** f **de** a **à** b *le nombre réel $F(b) - F(a)$ que l'on note:* $\boxed{F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt}$
Dans les calculs, la différence $F(b) - F(a)$ est notée $[F(t)]_a^b$.

Remarque 1 : Cette définition a bien un sens: *l'intégrale ne dépend pas du choix de la primitive:*

Proposition 3 **(linéarité):** *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, $a, b \in I$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors:*
$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ *et* $\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$.

Remarque 2 Propriété équivalente à : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$

Proposition 4 **(relation de Chasles):** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous $a, b, c \in I$:*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,.$$

1.2 Nouvelles propriétés de l'intégrale

Proposition 5 *Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I, soient $a, b \in I$ tels que* $\boxed{a < b}$
(1) $f \geqslant 0$ sur $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f \geqslant 0$. (positivité)
(2) $f \geqslant g$ sur $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f \geqslant \int_a^b g$. (croissance)
(3) $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f| \leqslant \max_{[a,b]} |f| \times (b - a)$

Remarque 3 :
(1) L'ordre des bornes est FONDAMENTAL!!!!
Il faut penser à remettre les bornes dans le bon sens par la formule: $\int_a^b f = -\int_b^a f$. En effet:

Si $f \geqslant 0$ et $a > b$ alors $\int_b^a f \geqslant 0$, et puisque $\int_a^b f = -\int_b^a f$, $\int_a^b f \leqslant 0$

(2) Si $f \leqslant 0$ et $a < b$, on a aussi: $\int_a^b f \leqslant 0$.

(3) ATTENTION! Les réciproques de (1) et (2) sont fausses...

contre-exemple: $\int_{-1}^2 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \geqslant 0$, et pourtant $t \mapsto t$ change de signe sur $[-1, 2]$...

Preuve:

$\blacksquare$

Exemple 1 (encadrements d'intégrales):
Soit f continue sur $[a, b]$ telle que: il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leqslant f \leqslant M$ sur $[a, b]$. Alors:

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leqslant M \text{ (inégalité de la moyenne)}$$

En d'autres termes: la valeur moyenne $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$ *appartient à l'ensemble des valeurs atteintes par la fonction.*

Preuve:

$\blacksquare$

Exemple 2 : Suites d'intégrales (ou calcul de limite par encadrement)

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$. Encadrement de I_n:

POINT MÉTHODE 1 : il suffit d'encadrer $(x \mapsto \frac{x^n}{1+x})$ $\boxed{\text{sur } [0,1]}$ (attention à l'ordre des bornes!!)

$*$ *Mauvais encadrement* (ou encadrement trop grossier qui ne donne pas la limite)

$\forall x \in [0, 1]$, $x^n \in [0, 1]$, et puisque $\frac{1}{1+x} > 0$, $0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1$.

Donc en intégrant $(0 < 1)$:

$*$ *Bon encadrement* (qui donne la limite):

CONCLUSION: $\boxed{\text{on encadre ce qu'on veut éliminer; on multiplie par ce qu'on veut garder}}$

(2) $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\, e^t\, dt.$

Proposition 6 *Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$, où* $\boxed{a<b}$
$f(t) = 0\, \forall t \in [a,b]$ *ssi* $\displaystyle\int_a^b f = 0.$

Remarque 4 : Encore valable si $f \leqslant 0$ sur $[a,b]$.

Preuve: $\boxed{\Rightarrow}$ C'est clair.
$\boxed{\Leftarrow}$ On a $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a) = 0.$

■

Remarque 5 : Interprétation géométrique des propriétés de l'intégrale
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$

(1) $f \geqslant 0 \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f = \mathcal{A}(D) \geqslant 0$ et $f \leqslant 0 \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f = -\mathcal{A}(D) \leqslant 0$: c'est la POSITIVITÉ de l'intégrale
(2) Pour $c_1 \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^b f$: c'est la RELATION DE CHASLES
(3)

$$\underbrace{-\mathcal{A}(D_1) - \mathcal{A}(D_2)}_{-\int_a^b |f|} \leqslant \int_a^b f = \mathcal{A}(D_1) - \mathcal{A}(D_2) \leqslant \underbrace{\mathcal{A}(D_1) + \mathcal{A}(D_2)}_{\int_a^b |f|},$$

donc c'est la propriété: $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f|$
(4) $\forall x \in [a,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, donc:

$$\underbrace{m\,(b-a)}_{\text{aire du rectangle vert}} \leqslant \int_a^b f = \mathcal{A}(D_1) - \mathcal{A}(D_2) \leqslant \underbrace{M(b-a)}_{\text{aire du rectangle rouge}}.$$

C'est l'INÉGALITÉ DE LA MOYENNE
(5)

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f| \leqslant \underbrace{\max_{[a,b]} |f|}_{\text{aire du rectangle}}.$$

1.3 Calcul intégral vu au premier semestre

Recherche d'une primitive, formule d'intégration par parties, changement de variable :

Théorème 2 *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Pour tous $a, b \in I$:*

$$\boxed{\int_a^b u'(t)\, v(t)\, dt = [u(t)\, v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)\, v'(t)\, dt}$$

Théorème 3 *Soient f continue sur un intervalle I et $\alpha, \beta \in I$. Soit u de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ telle que $u([\alpha, \beta]) \subset I$. Alors:*

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(u(t))\, u'(t)\, dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\, dx}$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable $\mathcal{C}^1$ $\underline{x = u(t)}$

Remarque 6 : Mise en oeuvre du changement de variable $\mathcal{C}^1$ $x = u(t)$:
Trois choses à changer:
- **Les bornes,**
- **La variable,**
- **La différentielle.** "à la physicienne"

2 Fonction intégrale de ses bornes

Proposition 7 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $\boxed{a \in I}$*
Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $F' = f$.

Remarque 7 ATTENTION AUX ERREURS CLASSIQUES:
(1) f *continue* sur I et non dérivable!
(2) $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$, et non $F'(x) = f'(x)$!
(3) Cohérence des notations: $F'(x) = f(t)$ ne veut rien dire... Pire: $\displaystyle\int_a^x f(x)\, dx$ ne sera pas toléré dans une copie...

Remarque 8 On a $F(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)\, dt$, donc $\boxed{F(a) = 0}$ et $F' = f$.
Conclusion: $\boxed{F \text{ est l'unique primitive de } f \text{ qui s'annule en } a}$
exemple: $\forall x > 0$, $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$.

Preuve:

■

Remarque 9 ATTENTION
(1) Si f est continue sur I, <u>toutes</u> les primitives de f sur I ne s'expriment pas sous la forme $\displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ (seulement quelques unes...)
contre-exemple: Les primitives de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $\exp + C$, $C \in \mathbb{R}$.
Si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \displaystyle\int_a^x e^t\, dt$, alors $e^x = [e^t]_a^x = e^x - e^a$ et donc $e^a = 0$!!!
(2) Dire que $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t}\, dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ est FAUX!
En effet, $1 \notin]-\infty, -1[$... Donc cette fonction est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$ seulement...!

Exemple 3 Etude de la fonction F donnée par: $F(x) = \displaystyle\int_1^x \ln t\, dt$. (SANS CALCULER L'INTÉGRALE)

(En calculant l'intégrale: connaissez-vous une primitive de ln sur $]0, +\infty[$?)

Corollaire 1 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, et u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et à valeurs dans $[a, b]$.*
Alors la fonction $\phi : I \to \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt$ est dérivable sur I et $\phi'(x) = f(v(x))\, v'(x) - f(u(x))\, u'(x)$.

Preuve (à savoir refaire):

■

Exemple 4 :
(1) $F(x) = \displaystyle\int_0^{2x} e^{-t}\, dt$.

(2) $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} e^{-t^2}\, dt$.

Annexe :

Proposition 8 *Soit f une fonction continue, croissante et positive sur $[a, b]$. Alors f admet une primitive sur $[a, b]$ et $\displaystyle\int_a^b f$ est l'aire du domaine délimité par les droites $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f.*

Preuve: On note A la fonction définie sur $[a, b]$ par: $\forall x_0 \in [a, b]$, $A(x_0) = \mathcal{A}(D)$, où D est le domaine délimité par les droites $x = a$, $x = x_0$, $y = 0$ et $\mathcal{C}_f$.
Montrons que A est une primitive de f sur $[a, b]$:
$*$ $\forall x_0 \in [a, b[$: soit $h > 0$ tel que $x_0 + h \in [a, b]$.
$A(x_0 + h) - A(x_0) = \mathcal{A}(D_h)$, où D_h est le domaine délimité par les droites $x = x_0$, $x = x_0 + h$, $y = 0$ et $\mathcal{C}_f$.
Or f est croissante sur $[a, b]$ donc $\forall x \in [x_0, x_0 + h]$, $f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0 + h)$, donc $\Delta_{inf} \subset D_h \subset \Delta_{sup}$, où Δ_{sup} est le rectangle de hauteur $f(x_0 + h)$ et de largeur $x_0 + h - x_0 = h$, et Δ_{inf} est le rectangle de hauteur $f(x_0)$ et de largeur $x_0 + h - x_0 = h$. Donc:

$$f(x_0)\, h \leqslant A(x_0 + h) - A(x_0) \leqslant f(x_0 + h)\, h \underset{h>0}{\Rightarrow} f(x_0) \leqslant \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h)\,.$$

On passe à la limite $h \to 0^+$: f étant continue sur $[a,b]$ et donc en x_0, $\lim\limits_{h\to 0^+} f(x_0+h) = f(x_0)$, donc par encadrement: $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} = f(x_0)$.
Conclusion: A est dérivable à droite en x_0 et $\underline{A'_d(x_0) = f(x_0)}$

$*$ $\underline{\forall x_0 \in]a,b]}$: soit $h > 0$ tel que $x_0 - h \in [a,b]$.

De même, on montre que A est dérivable à gauche en x_0 et $\underline{A'_g(x_0) = f(x_0)}$
Conclusion: $\forall x_0 \in]a,b[$, A est dérivable à droite et à gauche en x_0, et $A'_d(x_0) = f(x_0) = A'_g(x_0)$, donc A est dérivable en x_0 et $A'(x_0) = f(x_0)$.
De plus, on a aussi: $A'_d(a) = f(a)$ et $A'_g(b) = f(b)$, donc $\boxed{A \text{ est dérivable sur } [a,b] \text{ et } A' = f}$
De plus, $A(a) = 0$ donc A est l'unique primitive de f qui s'annule en a donc on a: $\forall x \in [a,b]$, $A(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, et donc

$$\boxed{A(b) = \int_a^b f(t)\,dt}$$

■

Proposition 9 *Si f est continue et positive sur $[a,b]$, la proposition précédente est encore vraie: A est une primitive de f sur $[a,b]$ et $A(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.*

Preuve:
$*$ $\underline{\forall x_0 \in [a,b[}$: soit $h > 0$ tel que $x_0 + h \in [a,b]$.
f est continue sur le segment $[x_0, x_0+h]$ donc f est bornée et atteint ses bornes: il existe $c_h \in [x_0, x_0+h]$ et $d_h \in [x_0, x_0+h]$ tels que:

$$f(c_h) = \min_{[x_0,x_0+h]} f \text{ et } f(d_h) = \max_{[x_0,x_0+h]} f\,.$$

Donc $h\,f(c_h) \leqslant A(x_0+h) - A(x_0) \leqslant h\,f(d_h)$ et $(h>0)$ $f(c_h) \leqslant \dfrac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} \leqslant f(d_h)$.
On passe à la limite $(h \to 0^+)$: par encadrement, $\lim\limits_{h\to 0^+} c_h = x_0$, donc ($f$ étant continue en x_0) $\lim\limits_{h\to 0^+} f(c_h) = f(x_0)$. De même, $\lim\limits_{h\to 0^+} f(d_h) = f(x_0)$, donc par encadrement, $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} = f(x_0)$.
Donc A est dérivable à droite en x_0 et $\underline{A'_d(x_0) = f(x_0)}$

$*$ De la même façon, A est dérivable à gauche en x_0 et $\underline{A'_g(x_0) = f(x_0)}$.

Et on conclut comme dans la preuve précédente.

■