Intégration sur un segment

I. Fonction définie par une intégrale.

Exercice 1 Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition, justifier que la fonction est $\mathcal{C}^1$, et calculer la dérivée:

$$F(x) = \int_{1/2}^{x} \frac{dt}{t^2 - t} \qquad G(x) = \int_{3/2}^{x} \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} \qquad H(x) = \int_{x}^{1} \frac{t}{\sqrt{t^3 + 1}}\, dt\,.$$

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Justifier que les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer leur dérivée:

$$(a)\ g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)\, dt \quad (b)\ g(x) = \int_{0}^{x} x f(t) dt \quad (c)\ g(x) = \int_{0}^{x} f(t + x)\, dt\,.$$

Exercice 3 On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par: $F(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} \sqrt{t^4 + t^2 + 1}\, dt$.

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la parité de F.
3. Donner le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) \geqslant \dfrac{x^3}{3}$.
   (b) En déduire la limite de F en $+\infty$.
   (c) Que peut-on dire en $-\infty$?

Exercice 4 On considère la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par: $F(x) = \displaystyle\int_{1}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt$.

1. Donner le sens de variation de F sur $]0, +\infty[$.
2. (a) Étudier le signe de $g(x) = F(x) - \ln x$ pour tout réel $x > 0$.
   On pourra écrire $\ln x = \displaystyle\int_{1}^{x} \frac{1}{t}\, dt$.
   (b) En déduire la limite de F en 0 et en $+\infty$.

Exercice 5 On pose $f(x) = \displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4 + t^2}}$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que $\forall x \geqslant 0$,
   $$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}}$$
   En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. Justifier la dérivabilité de f, calculer f' et dresser le tableau de variations de f.

Exercice 6 Considérons la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_{x}^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t}\, dt$.

1. Justifier l'existence de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et justifier que
   $$\forall x > 0\,,\ f'(x) = \frac{e^{-x^2}}{x} \left(2e^{x^2 - x^4} - 1\right)\,.$$
   En déduire les variations de f sur $]0, +\infty[$.

3. (a) Montrer que $\forall x > 0$,
$$e^{-x^4} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x^2} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t}\,.$$
En déduire la limite de f en $+\infty$.
   (b) f a-t-elle une limite en 0?

4. Donner l'allure graphique de f.

II. Suites définies par une intégrale.

Exercice 7 Étudier la monotonie des suites suivantes:
$a_n = \displaystyle\int_0^{1/n} \frac{x}{1+x^3}\,dx \qquad b_n = \int_1^{1/n} (\ln y)^3\,dy.$

Exercice 8 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(1+t^2)\,dt$.

1. Donner la monotonie des suites $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et $(J_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} I_{n+2}$.
4. En déduire la limite de (J_n) et donner un équivalent de J_n.

Exercice 9 Pour tout entier n on note:
$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 x e^{-x^2}(1-x)^n dx.$$

1. (a) Former le tableau de variation sur [0,1] de $x \mapsto x e^{-x^2}$.
   (b) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$:
$$0 \le J_n \le \frac{1}{\sqrt{2e}\,(n+1)}\,.$$
Puis étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Établir pour tout n de $\mathbb{N}$ une relation entre I_n et J_{n+1}.
En déduire la limite de I_n et donner un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10 On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x\,dx\,.$$

1. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0.
2. Montrer que: $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}\,.$
3. En déduire que :
$$e = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{résultat conjecturé en info}\ .$$