

Intégration sur un segment

I. Fonction définie par une intégrale.

Exercice 1 Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition, justifier que la fonction est \mathcal{C}^1 , et calculer la dérivée:

$$F(x) = \int_{1/2}^x \frac{dt}{t^2 - t} \quad G(x) = \int_{3/2}^x \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} \quad H(x) = \int_x^1 \frac{t}{\sqrt{t^3 + 1}} dt.$$

Exercice 2 On considère la fonction F définie sur \mathbb{R} par: $F(x) = \int_0^x \sqrt{t^4 + t^2 + 1} dt$.

1. Justifier que F est bien définie sur \mathbb{R} .
2. Étudier la parité de F .
3. Donner le sens de variation de F sur \mathbb{R} .
4. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) \geq \frac{x^3}{3}$.
(b) En déduire la limite de F en $+\infty$.
(c) Que peut-on dire en $-\infty$?

Exercice 3 On considère la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par: $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Donner le sens de variation de F sur $]0, +\infty[$.
2. (a) Étudier le signe de $g(x) = F(x) - \ln x$ pour tout réel $x > 0$.
On pourra écrire $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.
(b) En déduire la limite de F en 0 et en $+\infty$.

Exercice 4 On pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4 + t^2}}$

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que $\forall x \geq 0$,

$$0 \leq f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}}$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

4. Justifier la dérivabilité de f , calculer f' et dresser le tableau de variations de f .

Exercice 5 Considérons la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$.

1. Justifier l'existence de f .
2. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et justifier que

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{e^{-x^2}}{x} (2e^{x^2 - x^4} - 1).$$

En déduire les variations de f sur $]0, +\infty[$.

3. (a) Montrer que $\forall x > 0$,

$$e^{-x^4} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t} \leq f(x) \leq e^{-x^2} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

- (b) f a-t-elle une limite en 0?
4. Donner l'allure graphique de f .

II. Suites définies par une intégrale.

Exercice 6 Étudier la monotonie des suites suivantes:

$$a_n = \int_0^{1/n} \frac{x}{1+x^3} dx \quad b_n = \int_1^{1/n} (\ln y)^3 dy.$$

Exercice 7 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$ et $J_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t^2) dt$.

1. Donner la monotonie des suites $(I_n)_{n \geq 0}$ et $(J_n)_{n \geq 0}$.
2. Montrer que $\forall n \geq 1, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}$.
4. En déduire la limite de (J_n) et donner un équivalent de J_n .

Exercice 8 Pour tout entier n on note:

$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2} (1-x)^n dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x e^{-x^2} (1-x)^n dx.$$

1. (a) Former le tableau de variation sur $[0,1]$ de $x \mapsto x e^{-x^2}$.
(b) En déduire pour tout n de \mathbb{N} :

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}.$$

Puis étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. Établir pour tout n de \mathbb{N} une relation entre I_n et J_{n+1} .
En déduire la limite de I_n et donner un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 9 On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx.$$

1. Montrer que la suite (I_n) tend vers 0.
2. Montrer que: $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
3. En déduire que :

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{résultat conjecturé en info .}$$