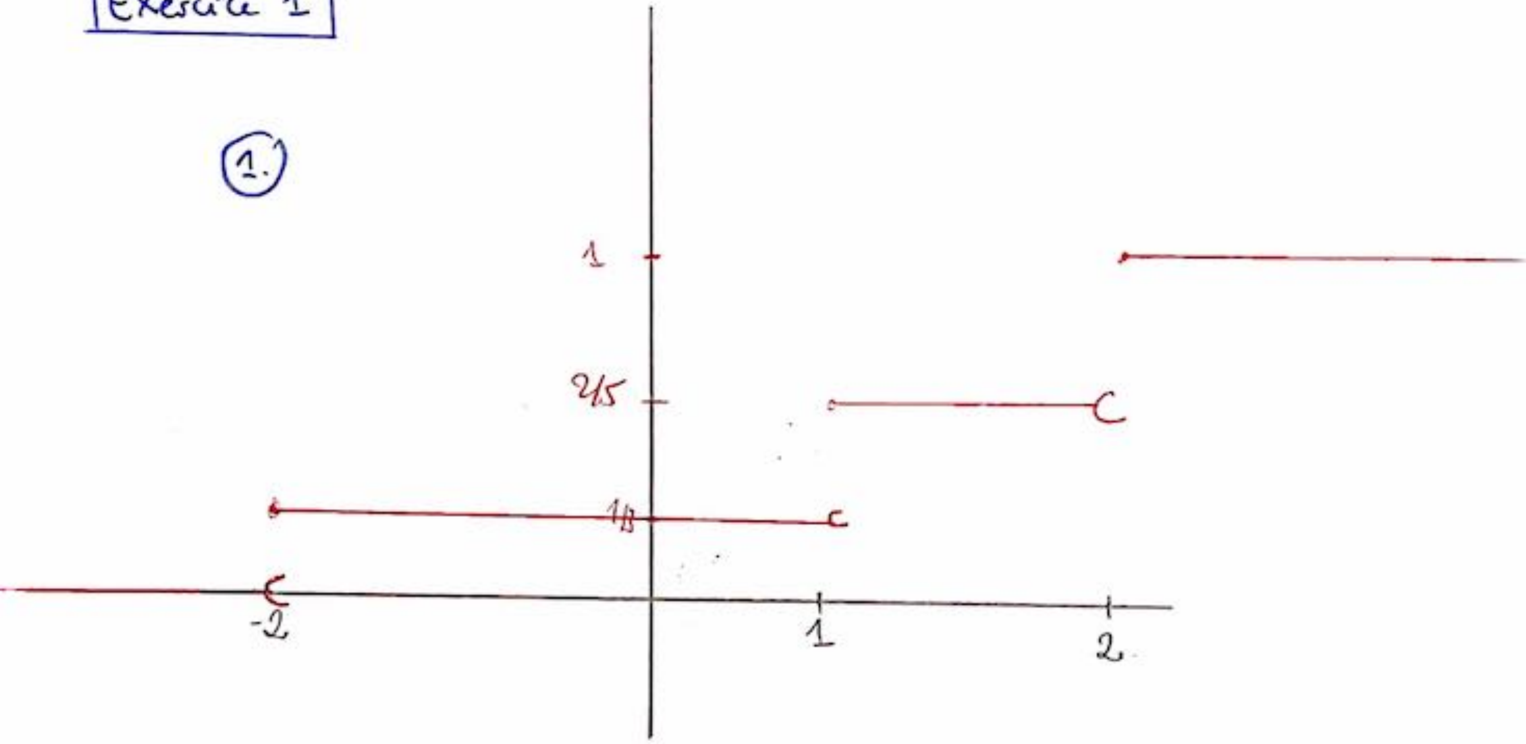
DM12 - 7/06/2024
Corrigé

Exercice 1

1.



$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leq x)$

2. $\boxed{X(\Omega) = \{-2, 1, 2\}}$

$P(X \leq 0) = P(X \leq -2)$ car $(X \leq 0) = (X \leq -2) \cup \underbrace{(-2 < X \leq 0)}_{=\emptyset}$

$= F(-2)$ donc $\boxed{P(X \leq 0) = \frac{1}{3}}$

3. $P(X=1) = P(X \leq 1) - P(X \leq -2)$

$= F(1) - F(-2)$

$= \frac{2}{5} - \frac{1}{3}$

donc $\boxed{P(X=1) = \frac{1}{15}}$

(4.)

$X(\Omega)$	-2	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{5}$

$$P(X=-2) = P(X\leq -2) = \frac{1}{3}.$$

donc $P(X=2) = 1 - P(X=-2) - P(X=1)$

$$= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{15} = \frac{15-5-1}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Exercice 2

(par exemple) on note $Y=0$ si on n'a jamais eu 6.

$\boxed{Y(\Omega) = [\![0, 5]\!].}$

On note D_k = " le dé donne 6 au $k^{ième}$ lancer "

$\forall k \in [\![1, 5]\!]$, $(Y=k) = \overline{D_1} \cap .. \cap \overline{D_{k-1}} \cap D_k$

indépendance donc $P(Y=k) = P(\overline{D_1}) \times .. \times P(\overline{D_{k-1}}) \times P(D_k)$

$$P(Y=k) = \left(1-\frac{1}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}.$$

$(Y=0) = \overline{D_1} \cap .. \cap \overline{D_5}$ donc $P(Y=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^5$

Exercice 3

(1.) Soit X la va égale au nombre de pénaltys marqués.

- 5 épreuves indépendantes (tirer un penalty)
- à 2 issues, de succès (marquer) de probabilité $\frac{2}{3}$.
- X compte le nb de succès donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(5, \frac{2}{3})}$

(2.) On cherche $P(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(1-\frac{2}{3}\right)^{5-3} = \frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$$= \frac{5\times \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} \times \frac{2^3}{3^5}$$

$$\boxed{P(X=3) = \frac{5\times 2^4}{3^5}}$$

(3.) $E(X) = 5\times\frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

Exercice 4

(1.) (a)

```
import random as rd
def jeu(N ):
    for k in range(1, N+1):
        if rd.random() > 1/(k+1):
            return k.
    return N
```

(b)

```
def sp(N, m):
    S=0
    for k in range(m):
        S = S + jeu(N)
    return S/m
```

(2.) $X_N(\Omega) = [\![1, N]\!]$. R_k = " le niveau k a été réussi "

$\forall k \in [\![1, N-1]\!]$,

$$(X_N = k) = R_1 \cap .. \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}}$$

$$P(X_N = k) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) \times .. \times P_{R_1 \cap .. \cap R_k}(\overline{R_{k+1}})$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} \times .. \times \frac{1}{k} \times \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$P(X_N = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

$(X_N = N) = R_1 \cap .. \cap R_N$ donc $P(X_N = N) = \frac{1}{N!}$