Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2023/2024
Mme MOREL

DS 9 – Mathématiques

Mercredi 12 juin 2024

Durée de l'épreuve : 2 heures 30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer**, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de quatre exercices de mathématiques .

Exercice 1. :

1. $\forall \lambda \in]0,+\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f d'expression : $f(x) = x^{\lambda}\ (\ln(x))^n$
   (a) Donner l'ensemble de définition de f.
   (b) Donner la classe de f sur son ensemble de définition.
   (c) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 . *on continuera d'appeler f ce prolongement*
   Préciser $f(0)$
   (d) Pour quelle(s) valeur(s) de λ f est-elle dérivable en 0 ? Le cas échéant, on précisera $f'(0)$.
   Dans ce cas, f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$?
2. Pour tout réel $\lambda > 0$, pour tout entier naturel n, on définit :

$$I_n = \int_1^e x^{\lambda}\ (\ln(x))^n\ dx$$

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{e^{\lambda+1}}{\lambda+1} - \dfrac{n}{\lambda+1}\, I_{n-1}$

Exercice 2. :

1. Montrer que la fonction $\left(x \mapsto \dfrac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x+\sin x}\right)$ est définie et continue sur $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$
2. Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\theta) = \dfrac{1}{2}\,(1+\cos(2\,\theta))$
3. En posant le changement de variable : $t = x + \sin x$, calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x+\sin x}\,dx$

Exercice 3. : On considère $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\cos(t)}\,dt$

1. Déterminer l'ensemble de définition de : $\left(t \mapsto \dfrac{1}{\cos(t)}\right)$
2. En déduire que F est bien définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

3. Montrer que : $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, $F(-x) = -F(x)$.

Exercice 4. : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire dans cette urne, successivement et avec remise, un certain nombre de boules.
Au $k$ième tirage ($k \in \mathbb{N}^*$), on considère une variable aléatoire X_k telle que $X_k = 1$ si le numéro de la boule tirée à ce $k$ième tirage n'avait jamais été tiré auparavant et $X_k = 0$ sinon. On a donc nécessairement $X_1 = 1$.
Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$D_m = X_1 + X_2 + \ldots + X_m$$

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Que représente la variable aléatoire D_m ?
2. (a) Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note Y_i la variable égale au numéro de la boule sortie au $i$ème tirage. Donner la loi de Y_i et son espérance.

   (b) Montrer que : $\forall \ell \in [\![1, n]\!]$,

   $$P_{(Y_k=\ell)}(X_k = 1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$$

   (c) En déduire que :

   $$P(X_k = 1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$$

   (d) Établir alors la loi de X_k. Donner son espérance et sa variance.
3. (a) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, calculer l'espérance de D_m.

   (b) Préciser la limite de $E(D_m)$ quand m tend vers $+\infty$.
   Le résultat obtenu vous semble-t-il logique ?