DS9 _ Corrigé
12/06/2024.

Exercice 1

1. (a) $f(x) = x^\alpha \ln(x)^n$ donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]0,+\infty[}$

(b) Par composée et produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$,
$\boxed{f \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[)}$

(c) en 0 : Par C.C, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$
donc f se prolongeable par continuité en 0 avec $\boxed{f(0)=0}$

(d) en 0 : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x^\alpha (\ln x)^n}{x} = x^{(\alpha-1)}(\ln(x))^n$.

- si $\alpha < 1$: $\alpha - 1 < 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} x^{(\alpha-1)} = +\infty$
donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \infty$ donc f non dérivable en 0.

- si $\alpha = 1$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = (\ln x)^n \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$ donc f non dérivable en 0.

- si $\alpha > 1$: Par C.C, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \in \mathbb{R}$ donc f dérivable en 0

Conclusion : $\boxed{f \text{ dérivable en } 0 \text{ ssi } \alpha > 1 \text{ et } f'(0) = 0}$

- $\forall x > 0$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}(\ln(x))^n + x^\alpha \dfrac{n}{x}(\ln(x))^{n-1}$

$\alpha > 1$
et $n \geq 1$

$= \alpha x^{\alpha-1}(\ln x)^n + n\, x^{\alpha-1}(\ln x)^{n-1}$

par C.C, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$ donc f' continue en 0.

Conclusion : $\boxed{f \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[)}$

(2)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

les fonctions $(x \mapsto (\ln x)^n)$ et $(x \mapsto x^{\alpha+1})$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$

$$\left(\begin{array}{cc} (\ln x)^n & \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \\ \downarrow & \uparrow \\ \dfrac{n}{x}(\ln x)^{n-1} & x^{\alpha} \end{array}\right)$$

donc par IPP :

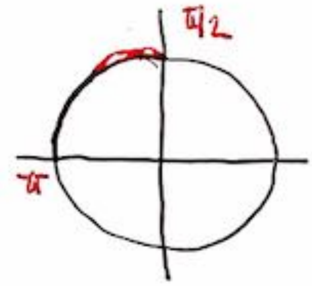
$$I_n = \left[(\ln x)^n \times \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \, \frac{n}{x} (\ln x)^{n-1} \, dx$$

$$= \frac{e^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{n}{\alpha+1} \int_1^e x^{\alpha} (\ln x)^{n-1} \, dx$$

$$\underline{\underline{I_n = \frac{e^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{n}{\alpha+1} I_{n-1}}}$$

Exercice 2

1.



$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \underbrace{\sin x}_{\geq 0} + x \geq x > 0$

donc f définie sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Et par composée et quotient de fonctions continues, f est continue sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

2. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(2\theta) = \cos(\theta+\theta) = \cos(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(\theta)$

$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$= \cos^2(\theta) - (1 - \cos^2\theta)$$
$$= -1 + 2\cos^2(\theta)$$

donc $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\theta)\right)$

3.

$$\frac{dt}{dx} = 1 + \cos x$$
$$dt = (1+\cos x)\,dx = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x + \sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/2+\sin(\pi/2)}^{\pi+\sin\pi} \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{1+\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|t|\right]_{1+\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \boxed{\frac{\ln(\pi) - \ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}{2}}$$

Exercice 3

(1.) $\cos(t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}}$

(2.) $t \mapsto \frac{1}{\cos(t)}$ est continue sur le segment de bords 0 et x car $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

donc F est bien définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(3.)

$$\forall x \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[,\ F(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{\cos(t)}\, dt \underset{u=-t}{=} -\int_0^{x} \frac{1}{\cos(-u)}\, du$$

$$= -\int_0^{x} \frac{1}{\cos(u)}\, du = -F(x)$$

Exercice 4

(1.) D_n est égale au nb de boules de n° 2 à 2 distincts en n tirages.

(2.) (a) $\boxed{Y_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])}$ donc $E(Y_i) = \frac{n+1}{2}$

(b) sur $P_{(Y_k = l)}$: $(Y_k = l)$ est réalisé.

au $k^{\text{ième}}$ tirage, la boule n° l est sortie

donc $X_k = 1$ signifie que la boule n° l n'a jamais été tirée aux tirages 1 jusqu'au tirage $k-1$.

On note B_i : " la boule l a été tirée au tirage i ".

donc $P_{(Y_k=l)}(X_k = 1) = P(\bar{B}_1 \cap \ldots \cap \bar{B}_{k-1})$

$$\underset{\text{indépendance}}{=} P(\bar{B}_1) \times \ldots \times P(\bar{B}_{k-1})$$

$$= \frac{n-1}{n} \times \ldots \times \frac{n-1}{n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$$

(c) SCE associé à Y_k.

FPT :

$$P(X_k=1) = \sum_{\ell=1}^{n} P_{(Y_k=\ell)}(X_k=1)\, P(Y_k=\ell) = \sum_{\ell=1}^{n} P_{(Y_k=\ell)}(X_k=1) \times \frac{1}{n}.$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = \frac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$$

donc $\boxed{P(X_k=1)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}}$

(d)

$X_k(\Omega)$	0	1
$P(X_k=i)$	$1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$	$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$

Donc $\boxed{X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1, \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\right)}$

$E(X_k)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$ et $V(X_k)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\right)$

3. (a) Par linéarité,

$$E(D_m) = \sum_{k=1}^{m} E(X_k) = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k}$$

$$\underset{\frac{n-1}{n}\neq 1}{=} \frac{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m}}{1-\frac{n-1}{n}} = \boxed{n\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m}\right)}$$

(b) $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$ car $0<1-\frac{1}{n}<1$

donc $\boxed{\lim_{m\to+\infty} E(D_m)=n}$

résultat logique car pour un très grand nombre de tirage, on peut se dire que chaque boule va sortir au moins une fois.