# Développements limités

## I. Calcul de limites et équivalents.

**Exercice 1 :**

1. (a) Calculer $DL_2(0)$ de $e^{x^2} - \cos x$.

   (b) En déduire la limite en 0 de $\dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$.

2. (a) Calculer $DL_2(0)$ de $\ln(\cos x)$.

   (b) En déduire la limite en 0 de $(\cos x)^{1/x^2}$.

3. (a) Calculer $DL_3(0)$ de $2\tan x - \sin(2x)$.

   (b) Calculer $DL_3(0)$ de $x\,(1 - \cos(3x))$.

   (c) En déduire la limite en 0 de $\dfrac{2\tan x - \sin(2x)}{x\,(1-\cos(3x))}$.

**Exercice 2 :**

1. $f(x) = (e+x)^e - e^{e+x}$.
   Déterminer le DL à l'ordre deux en 0 de $f(x)$ et en déduire un équivalent de $f(x)$ en 0.

2. $g(x) = \sqrt{1+2x} - \cos x - \sin x$.
   Déterminer le DL à l'ordre trois en 0 de $g(x)$ et en déduire un équivalent de $g(x)$ en 0.

3. (a) Rappeler le $DL_3(0)$ de $\sin x$.

   (b) En déduire le $DL_2(0)$ de $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

   (c) Déterminer alors un équivalent de $1 - \dfrac{(\sin x)^x}{x^x}$ en 0.

## II. Position entre une courbe et sa tangente en $0$.

**Exercice 3 :**

1. Déterminer le DL à l'ordre deux en 0 de $\dfrac{x}{e^x - 1}$.
   *on pourra commencer par le $DL_3(0)$ de $e^x - 1$*

2. En déduire que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   Préciser la position relative entre la courbe de $f$ et sa tangente en 0.

**Exercice 4 :**

1. Déterminer le DL à l'ordre deux en 0 de $\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.
   *on pourra commencer par le $DL_4(0)$ de $\ln(1+x) - x$*

2. Soit $f : ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par:
$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$
   Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est alors dérivable en 0.
   Quelle est alors la position relative entre la courbe de $f$ et sa tangente en ce point?

**Exercice 5** On considère la fonction $f$ définie par:

$$f(x) = \begin{cases} (1+\sin x)^{1/x} & \text{si } x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[ \cup ]0, \frac{\pi}{2}[ \\ \lambda & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la classe de $f$ sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[ \setminus \{0\}$.

2. (a) Déterminer le DL à l'ordre 2 en 0 de $f$.
   (b) En déduire $\lambda$ pour que $f$ soit continue et dérivable en 0.
3. Déterminer une équation de la tangente au graphe de $f$ au point d'abscisse 0, et étudier la position entre le graphe et sa tangente au voisinage de 0.

## III. Position entre une courbe et son asymptote.

**Exercice 6** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = (x-2)\,e^{\frac{1}{x}}$.
Déterminer les asymptotes de $\mathcal{C}_g$ et la position de la courbe par rapport à ces asymptotes en l'infini.
*On pourra utiliser le DL à l'ordre deux en 0 de la fonction exponentielle.*

**Exercice 7** Soit $n$ un entier naturel non nul. On note $f_n$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f_n(x) = x\,e^{-\frac{n}{x}} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f_n(0) = 0\,.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthonormé.

1. Montrer que au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$, on a:

   $$f(x) \underset{\infty}{=} x - n + \frac{n^2}{2x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

   *On pourra utiliser le DL à l'ordre deux en 0 de la fonction* $(t \mapsto e^{-nt})$.
2. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, ainsi qu'au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}_n$ admet une asymptote oblique $D_n$ dont on donnera une équation.
   Préciser la position relative de $D_n$ et $\mathcal{C}_n$ aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.