TD Physique 13 **BCPST 1C**

- *Transport de matière par diffusion* -

❅ Exercice 01 : Titrage en chimie

Lors d'un titrage, on verse goutte à goutte une solution d'hydroxyde de sodium dans une solution diluée d'acide chlorhydrique se trouvant dans un bécher. Le réactif utile est l'ion hydroxyde dont le coefficient de diffusion dans le milieu vaut $D = 6{,}8.10^{-9}\ m^2.s^{-1}$.

1- Evaluer la durée au bout de laquelle les ions hydroxyde provenant d'une goutte ont diffusé dans l'ensemble de la solution du bécher.

2- Justifier l'utilisation d'un agitateur magnétique lors d'un titrage. Quel phénomène s'ajoute alors au transport diffusif ?

❅ Exercice 02 : Pastille d'uranium

On considère une pastille d'uranium de section S *et d'épaisseur* e*, qui peut être traversée par des neutrons d'une face à une autre : on note* Φ *le flux entrant de neutrons par une face et* Φ' *le flux sortant de neutrons par l'autre face.*

Dans la pastille d'uranium, il se produit des réactions nucléaires au cours desquelles les noyaux d'uranium absorbent des neutrons ; mais pour chaque neutron absorbé, K *neutrons sont produits (*K *vaut en général de 2 à 4). On note* $\frac{n*}{\tau}$ *le nombre de neutrons absorbés par unité de temps et par unité de volume dans la pastille,* τ *étant un temps caractéristique et* $n*$ *la densité volumique de neutrons dans la pastille, supposée uniforme.*

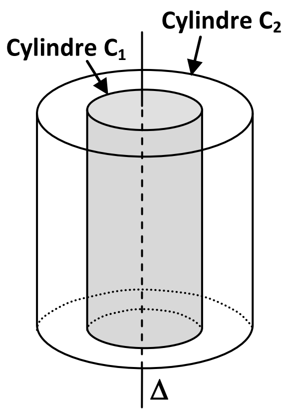
➡ A l'aide d'un bilan de particules dans la pastille d'uranium, déterminer l'expression de $n*$ en fonction de S, e, Φ, Φ', K et τ en régime stationnaire.

❅ Exercice 03 : Diffusion à symétrie cylindrique

Un cylindre C_1 *de rayon* R_1*, de hauteur* H *et d'axe* Δ *contient un dispositif produisant un gaz* X *en continu à raison de* σ *molécules de gaz par unité de volume et par unité de temps.*

Les parois horizontales de C_1 *sont parfaitement étanches mais sa paroi latérale est poreuse : il y a donc diffusion du gaz* X *vers l'extérieur jusqu'au cylindre* C_2 *de rayon* R_2*, de hauteur* H *et d'axe* Δ*. Les parois horizontales du cylindre* C_2 *sont parfaitement étanches et sa paroi latérale est constituée d'un matériau détruisant instantanément le gaz* X *à son contact.*

Dans la suite, on étudie les molécules de gaz X *qui diffusent entre les cylindres* C_1 *et* C_2 *et on suppose qu'un régime stationnaire est établi.*



1- Exprimer le flux Φ_1 de molécules de gaz X à travers la surface latérale du cylindre C_1 en fonction de σ, R_1 et h.

2- On note r la distance séparant l'axe Δ d'un point M situé dans une direction perpendiculaire à l'axe Δ avec $R_1 \leq r \leq R_2$. Montrer que le flux de molécules de gaz est constant en réalisant un bilan de matière entre les cylindres de rayons r et r + dr.

3- Dans ces conditions, donner l'expression de la densité volumique de molécules n*(r) pour $R_1 \leq r \leq R_2$. On donnera cette expression en fonction de σ, R_1, R_2, r et du coefficient de diffusion D du gaz X.

4- On note N_1 le nombre de molécules de gaz X présentes dans le cylindre C_1. En supposant la densité volumique de particules uniforme dans tout le cylindre C_1, exprimer N_1 en fonction de σ, R_1, R_2, H et D.

❅ Exercice 04 : Diffusion à symétrie sphérique

Une sphère B *de rayon* R *et de centre* O *contient un dispositif produisant un gaz* X *en continu à raison de* σ *molécules de gaz par unité de volume et par unité de temps (X n'est pas un des gaz constituant l'atmosphère). La paroi de la sphère* B *étant poreuse, il y a donc diffusion du gaz* X *vers l'atmosphère extérieure.*

Dans la suite, on étudie les molécules de gaz X *qui diffusent depuis la surface de la sphère* B*. On supposera qu'un régime stationnaire est établi.*

1- Exprimer le flux Φ_B de molécules de gaz X à travers la surface de la sphère B en fonction de σ et de R.

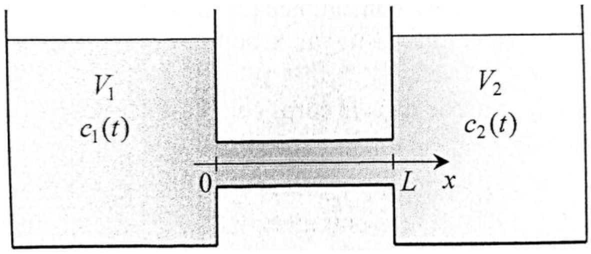
2- On note r la distance séparant le centre O de la sphère du point M étudié avec $r \geq R$. Montrer que le flux de molécules de gaz est constant en réalisant un bilan de matière entre les sphères de rayons r et r + dr.

3- Dans ces conditions, donner l'expression de la densité volumique de molécules n*(r) pour $r \geq R$. On donnera cette expression en fonction de σ, R, r et du coefficient de diffusion D du gaz X.
<u>NB</u> : il pourra être utile de formuler une hypothèse concernant n* *lorsque* r *tend vers l'infini …*

4- On note N_B le nombre de molécules de gaz X présentes dans la sphère B. En supposant la densité volumique de particules uniforme dans toute la sphère B, exprimer N_B en fonction de σ, R et D.

❅ Exercice 05 : Diffusion entre deux récipients

Deux récipients de volume V_1 *et* V_2 *communiquent par un tuyau poreux assimilable à un cylindre de longueur* L *et de rayon* R. *Une solution contenant un soluté moléculaire se trouve de part et d'autre, aux concentrations molaires respectives* $c_1(t)$ *et* $c_2(t)$ *telles que* $c_1(t) > c_2(t)$. *Chacune de ces concentrations est supposée uniforme dans tout le volume de récipient correspondant.*



En accord avec la loi de Fick, il s'établit selon l'axe **(Ox)** *un flux molaire de molécules (noté* Φ_m *et exprimé en* $mol.s^{-1}$*) avec un coefficient de diffusion* D.

Données : $V_1 = 10{,}0$ L ; $V_2 = 1{,}0$ L ; L = 3,0 cm ; R = 1,0 cm ; $D = 3{,}0.10^{-10}\ m^2.s^{-2}$

1- Donner l'expression de la loi de Fick en faisant apparaître les grandeurs Φ_m, D, R et c où c représente la concentration molaire en soluté moléculaire dans le tuyau poreux. Un raisonnement par analyse dimensionnelle pourra aider …

2- Calculer le temps caractéristique τ associé à la diffusion dans le tuyau.

On supposera dans la suite que l'évolution des concentrations dans les deux récipients se fait sur une durée caractéristique T *(appelée « temps de relaxation ») très grande devant* τ.

3- Quel type de régime peut-on donc supposer concernant le phénomène de diffusion ayant lieu dans le tuyau ? Dans ces conditions, effectuer un bilan de quantité de matière (en mol) sur une petite tranche de fluide située entre les abscisses x et $x + dx$. En déduire que le flux molaire Φ_m a la même valeur tout le long du tuyau.

4- En déduire que la concentration $c(x)$ vérifie la relation : $c(x) = \dfrac{c_2 - c_1}{L} \times x + c_1$.

5- En déduire une expression du flux molaire Φ_m en fonction de $\Delta c = c_1 - c_2$.

6- A l'aide d'un bilan de quantité de matière (en mol) réalisé pour le récipient 1, montrer que $\dfrac{dc_1}{dt}$ s'exprime en fonction de Φ_m et de V_1.

7- De même, pour le récipient 2, montrer que $\dfrac{dc_2}{dt}$ s'exprime en fonction de Φ_m et de V_2.

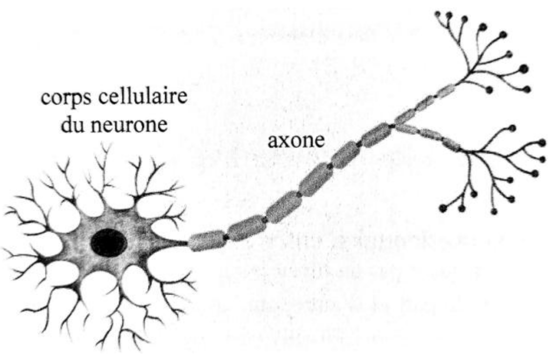
8- En déduire que Δc vérifie l'équation différentielle : $\dfrac{d(\Delta c)}{dt} + \left(\dfrac{1}{V_1} + \dfrac{1}{V_2}\right) \times \dfrac{\pi D R^2}{L} \times \Delta c = 0$.

9- Le temps caractéristique de cette équation différentielle s'identifie au temps de relaxation T. Déterminer son expression puis faire l'application numérique. Commenter.

10- Résoudre l'équation différentielle.

❅ Exercice 06 : Transport diffusif le long d'un axone

La transmission de signaux par l'axone d'un neurone nécessite la diffusion de diverses substances le long de l'axone : on s'intéresse ici à la diffusion du glucose (noté G), en considérant l'axone comme un simple tube d'axe (Ox), de longueur L *et de section* S, *sans ramifications.*



Le corps cellulaire du neurone fournit du glucose à l'axone. On considèrera que la concentration molaire en glucose dans ce corps cellulaire est constante. Mais plus on s'éloigne du corps cellulaire, plus la concentration molaire en glucose diminue le long de l'axone car cette espèce est consommée par divers éléments actifs.

On note α *(grandeur positive) la quantité de matière de glucose consommée par unité de temps et par unité de longueur de l'axone : un bon fonctionnement nécessite que* α *soit uniforme le long de l'axone et constant au cours du temps.*

Données :
- Concentration du glucose dans le corps cellulaire : $[G]_0 = 1{,}2.10^{-3}\ mol.L^{-1}$;
- Consommation linéique du glucose dans l'axone : $\alpha = 4{,}8.10^{-14}\ mol.m^{-1}.s^{-1}$;
- Coefficient de diffusion du glucose dans l'axone : $D = 2{,}0.10^{-10}\ m^2.s^{-1}$;
- La loi de Fick s'écrit de la même manière pour des flux molaires Φ_m et des concentrations molaires C que pour des flux de particules Φ et des densités volumiques de particules n*.

1- On se place dans tout le problème en régime stationnaire. En effectuant un bilan de quantité de matière (en mol) sur une tranche infinitésimale de l'axone entre deux sections d'abcisses x et $x + dx$, montrer que le flux molaire Φ_m de long de l'axone vérifie l'équation différentielle : $\dfrac{d\Phi_m}{dx} = -\alpha$

2- En appliquant la loi de Fick, montrer que la concentration molaire en glucose $[G]$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2[G]}{dx^2} = \frac{\alpha}{DS}$$

3- En supposant que le flux en glucose devient nul à l'extrémité $x = L$ de l'axone, déterminer la solution de cette équation différentielle.

4- Montrer que la longueur L de l'axone ne peut pas dépasser une certaine valeur L_{max}. Evaluer sa valeur pour un axone de diamètre $d = 10\ \mu m$ puis commenter.

❅ Exercice 07 : Collecte de nutriments par une bactérie

Pour assurer son métabolisme, une bactérie a besoin de consommer en permanence des nutriments. Leur absorption se produit à travers des pores membranaires, répartis à la surface. Dans le cas d'une bactérie immobile, la collecte de nutriments se fait donc par diffusion depuis le milieu environnant jusqu'à la surface. Le but de cet exercice est de modéliser ce processus afin de définir les conditions extrêmes au-delà desquelles une bactérie immobile ne peut plus subvenir à ses besoins.

On assimilera la bactérie à une sphère de rayon R *et de centre* O*, et on supposera qu'elle absorbe les nutriments de façon isotrope à sa surface. Dans le milieu extérieur, les nutriments migrent de façon diffusive, avec un coefficient de diffusion* D*. On notera* c(r) [en $mol.m^{-3}$] *la concentration molaire en nutriments au point* M *à la distance* r *de* O (r ≥ R) *et* c_∞ *leur concentration loin de la bactérie.*

La collecte de nutriments par la bactérie peut se quantifier par un flux molaire $\Phi_m(r)$ [en $mol.s^{-1}$] *correspondant à la quantité de matière de nutriments sortant par unité de temps d'une sphère de rayon* r *centrée sur la bactérie ; ainsi,* $\Phi_m(r)$ *est orienté vers les* r *croissants (convention habituelle), mais il est négatif car en réalité, les nutriments rentrent dans la bactérie.*

1- Enoncer la loi de Fick en faisant intervenir les grandeurs $\Phi_m(r)$, c(r), D et r.

2- En réalisant un bilan de matière entre les sphères de rayons r et r + dr, montrer que $\Phi_m(r)$ est une constante (on la notera plus simplement Φ_m dans la suite).

Au niveau de la surface de la bactérie, le flux $\Phi_m(R)$ *est déterminé de sorte que la quantité de matière de nutriments entrante permette d'assurer l'activité métabolique, caractérisée par la quantité de matière de nutriments consommée par unité de temps et de volume de la bactérie, notée* A [en $mol.s^{-1}.m^{-3}$]. *On supposera qu'un régime stationnaire est établi.*

3- Relier le flux molaire Φ_m de nutriments collectés par la bactérie à sa consommation A et à son rayon R.

4- En déduire que la concentration c(r) vérifie la relation : $c(r) = \frac{A.r^3}{3D} \times \frac{1}{r} + c_\infty$.

Une bactérie ne peut pas collecter plus qu'une certaine quantité de nutriments par unité de temps : en effet, si sa consommation en nutriments est trop rapide, le phénomène de diffusion n'a pas le temps de renouveler les nutriments sur la surface de la bactérie. On définit alors une consommation maximale A_{max} *pour la bactérie.*

5- En tenant compte des informations précédentes, déterminer l'expression de A_{max} en fonction de c_∞, D et R.

6- Pour la bactérie Escherichia coli, on donne A = 10 $mol.m^{-3}.s^{-1}$, R = 1 µm et D = $1.10^{-9}\ m^2.s^{-1}$ pour le nutriment considéré (le glucose). En déduire l'ordre de grandeur de la concentration c_∞ minimale dans le milieu pour que cette bactérie puisse y survivre.