

DS 1 – Mathématiques

Mercredi 18 Septembre 2024

Durée de l'épreuve : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la **qualité de la rédaction**, la **clarté** et la **précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer**, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'un exercice d'informatique et de sept exercices de mathématiques.

L'informatique doit être traitée sur une feuille à part.

Exercice 1 (Informatique - langage PYTHON). :

- Écrire une fonction qui prend en argument un nombre réel x et qui renvoie la valeur de l'inverse de son carré.
- Écrire une fonction `calculs(a,b)` d'arguments deux réels a et b et qui renvoie la valeur de : $\frac{a+1}{a+b-1}$
 - On appelle `calculs(2,6)` dans la console. Quel est le résultat renvoyé par l'ordinateur ?
 - SANS CALCULER** `calculs(6,2)`, justifier pourquoi les résultats renvoyés par `calculs(6,2)` et `calculs(2,6)` ne sont pas les mêmes.
 - Calculer `calculs(6,2)`
- On tape dans l'éditeur :

```
def mystere(x):  
    s=0  
    s=s+x  
    s=s+2*x  
    s=s+3*x  
    return s
```

- Et on appelle `mystere(5)` dans la console. Expliquer, en détaillant chaque étape de la fonction, le résultat renvoyé par l'ordinateur.
- Écrire le résultat renvoyé par `mystere(5)` sous forme de Σ

Exercice 2. Écrire en fonction des puissances de 2 et de 5 :

1. $8 \times (7 \times 5)^5 \times \frac{5^2 \times 7^3}{7^4 \times 5^5} \times (7^{-2})^2$

2. $\frac{12 \times 10^{-9} \times 5 \times (10^2)^3}{24 \times 10^{-2}}$

Exercice 3. On se donne deux réels a et b tels que :

$$1 < a < 2 \quad \text{et} \quad -5 < b < -3$$

Donner un encadrement de :

1. $a + b$

3. $3b - 2a$

5. $\frac{a}{b}$

7. b^2

2. $a - b$

4. ab

6. $\frac{b}{a}$

8. $\frac{\sqrt{a-1}}{b^2}$

Exercice 4. :

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

2. Pour tout réel x , calculer :

(a) $\sqrt{(x^2 + 2)^2}$

(b) $\sqrt{(x^2 + 3x + 1)^2}$.

Exercice 5. Résoudre :

1. $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} \geq 0$

2. $\frac{6}{2 - \frac{x}{x-1}} = (x-1)^2$

Exercice 6. Pour tout nombre réel m , on considère le trinôme :

$$P_m(x) = (m+3)x^2 + 2(3m+1)x + m+3$$

1. Déterminer le nombre de racines réelles du trinôme P_m

2. Dans le cas où P_m admet deux racines réelles, donner le produit et la somme de ces deux racines.

Exercice 7. :

1. Donner le signe de $x^2 - 2x - 1$, pour tout réel x .

2. En déduire que : $\forall n \geq 5, 2^n > n^2$.

Exercice 8. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$$

Montrer que : $\forall n \geq 2, u_n > 1$