Devoir Maison 2

À rendre vendredi 27 septembre 2024

Exercice 1.

Simplifier (un seul ln) :

1. $\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}\right) - \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}+2}\right) + \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^3}{\sqrt{\mathrm{e}+2}}\right)$
2. $\ln\left(\left(5-\sqrt{2}\right)^{15}\right) + \ln\left(\left(5+\sqrt{2}\right)^{15}\right)$
3. $\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}\right) - \ln\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

Exercice 2.

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3^n \geqslant 1 + 2n$.

Exercice 3.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

Remarque : on admet que la suite est bien définie, soit : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2\,u_n}$
2. En déduire que :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \sqrt{2}$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$
3. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2^n}$