Devoir Maison 3

À rendre vendredi 4 octobre 2024

Exercice 1.

1. Montrer que :

$$3+\sqrt{5}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)^2 \quad \text{et} \quad 3-\sqrt{5}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)^2$$

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_1=1 \\ \forall n\in\mathbb{N}\,,\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n \end{cases}$$

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Exercice 2.

1. Montrer que : $\forall n\geqslant 2$, $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln(n)$
2. En déduire la valeur de : $S-n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$, pour tout entier naturel $n\geqslant 2$.

Exercice 3.

Pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, calculer les sommes :

1. $S_1=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{n}\,k-1}{2n}$
2. $S_2=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2\,(k-1)}{\sqrt{5}}$
3. $S_3=\displaystyle\sum_{k=4}^{2n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-k}\times\left(\sqrt{5}\right)^{2k+1}$