DM 2 -

Corrigé -

Exercice 1

1.

$$\ln\left(\frac{e-1}{e}\right) - \ln\left(\frac{e^3}{e+2}\right) + \ln\left(\frac{e^3}{\sqrt{e+2}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{e-1}{e} \times \frac{e^3}{\sqrt{e+2}}}{\frac{e^3}{e+2}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^2(e-1)}{\sqrt{e+2}} \times \frac{e+2}{e^3}\right) = \boxed{\ln\left(\frac{(e-1)\sqrt{e+2}}{e}\right)}$$

2.

$$\ln\left((5-\sqrt{2})^{15}\right) + \ln\left((5+\sqrt{2})^{15}\right)$$

$$= \ln\left((5-\sqrt{2})^{15} \times (5+\sqrt{2})^{15}\right)$$

$$= 15\ln\left((5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})\right)$$

$$= 15\ln(25-2) = \boxed{15\ln(23)}$$

③ $$\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{3}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{3}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(\sqrt{3}+1)2}{3(\sqrt{3}-1)}\right) = \ln\left(\frac{2(\sqrt{3}+1)^2}{3(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\cancel{2}(3+2\sqrt{3}+1)}{3(3-1)}\right) = \boxed{\ln\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{3}\right)}$$

Exercice 2

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $3^n \geqslant 1+2n$

* $\underline{n=0}$: $3^0 = 1$ et $1+2\times 0 = 1$ donc $3^0 \geqslant 1+2\times 0$ ✓

* $\underline{n\geqslant 0}$: Sq $3^n \geqslant 1+2n$ à un certain rang n.

Mq $3^{n+1} \geqslant 1+2(n+1) \Leftrightarrow 3^{n+1} \geqslant 3+2n$

$3^{n+1} = 3^n \times 3$, or par (HR), $3^n \geqslant 1+2n$

donc $3^{n+1} \geqslant 3(1+2n)$

$3^{n+1} \geqslant 3+6n$

or $3+6n = 3+2n+\underbrace{4n}_{\geqslant 0} \geqslant 3+2n$ ✓

Conclusion : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^n \geqslant 1+2n$

Exercice 3

1.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} - \sqrt{2}$

$$= \frac{u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$$ ✓

2. (a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geqslant \sqrt{2}$

* $n = 1$: $u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{2}{u_0}\right) = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}$

et $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$ donc $u_1 \geqslant \sqrt{2}$ ✓

* $n \geqslant 1$: Sq $u_n \geqslant \sqrt{2}$ à un certain rang n.

Mq $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$

$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$. Or $u_n \geqslant \sqrt{2} > 0$ par (HR)

donc $2u_n > 0$

et $(u_n - \sqrt{2})^2 \geqslant 0$

donc $u_{n+1} - \sqrt{2} \geqslant 0$

dit $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$ ✓

Conclusion : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $2u_n \geq 2\sqrt{2}$

or $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

et $2u_n, 2\sqrt{2} > 0$

donc $\frac{1}{2u_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq 1$

or $(u_n-\sqrt{2})^2 \geq 0$ donc $\frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n} \leq (u_n-\sqrt{2})^2$

soit $u_{n+1}-\sqrt{2} \leq (u_n-\sqrt{2})^2$

Pour $n=0$: $u_1-\sqrt{2} = \frac{3}{2}-\sqrt{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$

et $(u_0-\sqrt{2})^2 = (1-\sqrt{2})^2 = 1-2\sqrt{2}+2 = 3-2\sqrt{2}$

or $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$ donc $3-2\sqrt{2} > 0$

donc $u_1-\sqrt{2} \leq (u_0-\sqrt{2})^2$

(3.) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n-\sqrt{2} \leq (\sqrt{2}-1)^{2^n}$

* $n=1$: d'après les calculs de la question précédente,

$u_1-\sqrt{2} \leq (u_0-\sqrt{2})^{2^1}$ ✓

* $n \geq 1$: Sq $u_n-\sqrt{2} \leq (\sqrt{2}-1)^{2^n}$ à un certain rang n

Mq $u_{n+1}-\sqrt{2} \leq (\sqrt{2}-1)^{2^{n+1}}$

2(b): $u_{n+1}-\sqrt{2} \leq (u_n-\sqrt{2})^2$

or par (HR), $u_n-\sqrt{2} \leq (\sqrt{2}-1)^{2^n}$

$(x \mapsto x^2)$ est strictement ↗ sur $[0,+\infty[$ donc $(u_{n}-\sqrt{2})^2 \leq \left((\sqrt{2}-1)^{2^n}\right)^2$

et $u_n-\sqrt{2} \geq 0$ (2.(a))

$(\sqrt{2}-1)^{2^n} \geq 0$ ($\sqrt{2} \simeq 1{,}4$)

$u_{n+1}-\sqrt{2} \leq (\sqrt{2}-1)^{2^n \times 2}$

$u_{n+1}-\sqrt{2} \leq (\sqrt{2}-1)^{2^{n+1}}$ ✓

récurrence achevée.