Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2024/2025
Mme MOREL

DS 2 – Mathématiques

Mercredi 9 octobre 2024

Durée de l'épreuve : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer**, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'un exercice d'informatique et de sept exercices de mathématiques.

L'informatique doit être traitée sur une feuille à part.

Exercice 1 (Informatique - langage PYTHON). :

1. Écrire une fonction qui prend en argument un nombre réel `x` et qui renvoie la valeur de $\ln(|x+1|)$
2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; u_n = \left|\begin{array}{ll} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{array}\right.$$

   Écrire une fonction `terme(n)` d'argument un entier n et qui renvoie la valeur du terme u_n.
   On demande que la variable de sortie soit de type `integer`
3. Écrire une fonction `nombre_racines(a,b,c)` d'arguments trois réels a, b, c $(a \neq 0)$ qui renvoie
   — `True` si le trinôme $ax^2 + bx + c$ a deux racines réelles
   — `False` sinon.

Exercice 2. :

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{k^2 - k - 1}{(k+1)!} = \frac{a}{k!} + \frac{b}{(k+1)!} + \frac{c}{(k-1)!}$$

2. En déduire la valeur de la somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 - k - 1}{(k+1)!}$

Exercice 3. Soit un réel q quelconque. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} k\, q^k = \frac{q}{(q-1)^2}\, \left(n\, q^{n+1} - (n+1)\, q^n + 1\right)$$

Exercice 4. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} = \frac{1}{3}\,(u_n + 4n + 6)$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + \dfrac{1}{3^n}$

Exercice 5. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*\,,\; u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1}\,u_{n-1}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant u_n \leqslant n^2$

Exercice 6. : Écrire sans valeurs absolues : $|x^2 - 1| - |x^2 + 1| + |2x^2 - x + 1|$, en fonction de $x \in \mathbb{R}$

Exercice 7. Résoudre : $\ln\left(2x - \dfrac{3}{x}\right) \geqslant 0$

Exercice 8. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{ et } \quad \forall n \in \mathbb{N}^*\,,\; u_n = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,u_k$$

1. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = (n+1)!$
   • *on pourra utiliser l'hypothèse de récurrence forte : " $u_k = (k+1)!$ pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$" à un certain rang n fixé quelqconque.*
   • *on pourra aussi écrire : $k + 1 = (k+2) - 1$*
2. On se propose de démontrer ce résultat par une autre méthode :
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = (n+1)\,u_{n-1}$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{u_k}{u_{k-1}} = \frac{(n+1)!}{2}$.
   (d) Retrouver alors le résultat de la question 1.