

## Devoir Maison 6

À rendre vendredi 6 décembre 2024

### Exercice 1.

1. Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , donner la forme algébrique de :  $(1 + \cos(\theta) + i \sin(\theta))^n$
2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , donner la forme trigonométrique de :  $-2i e^{ix}$

### Exercice 2.

Calculer :  $\sum_{k=1}^n \sin(2k + 3)$ , pour tout entier  $n$  naturel non nul.

### Exercice 3.

1. Soit  $k \in \mathbb{N}$ , montrer que :
  - (a) Si  $k$  est pair ,  $i^k + (-i)^k = 2(-1)^k$
  - (b) Si  $k$  est impair,  $i^k + (-i)^k = 0$
2. En utilisant le binôme de Newton, montrer que :  $(2 + 3i)^n + (2 - 3i)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k 2^{n-k} (i^k + (-i)^k)$
3. En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(2 + 3i)^n + (2 - 3i)^n \in \mathbb{N}$ .