Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2024/2025
Mme MOREL

DS 3 – Mathématiques

Mercredi 13 novembre 2024

Durée de l'épreuve : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à $\boxed{\textbf{encadrer}}$, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'un exercice d'informatique et de cinq exercices de mathématiques.

L'informatique doit être traitée sur une feuille à part.

Exercice 1 (Informatique - langage PYTHON). :

1. Écrire une fonction qui prend en argument un entier `n` et qui renvoie la valeur de la somme : $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+5} \ln\left(\frac{k^2}{k+n}\right)$
2. On rappelle la formule de Bernoulli : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\,S_n = (a-b)\,T_n \text{ où } S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k\, b^{n-k} \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}\, b^k$$

   (a) Écrire une fonction `bernoulli` de paramètres a, b et n et qui renvoie la valeur de la somme S_n.
   (b) On souhaite faire calculer à l'ordinateur $\pi^5 - (\sqrt{6})^5$ en utilisant la fonction `bernoulli`. Que doit-on taper dans la console ?
   (c) Comment utiliser la fonction `bernoulli` pour renvoyer la valeur de T_n ?
   (d) Écrire une fonction `test` de paramètres a, b et n qui renvoie `True` si $(a-b)\,S_n = a^{n+1} - b^{n+1}$, `False` sinon.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n}{k+1}}{3^{2n-k}}$
2. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} \frac{j\,n}{k}$

Exercice 3. :

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{k}\binom{n}{k-1}$
2. En déduire la valeur de : $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k-1}$, pour tout n non nul.

Exercice 4. : On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 > 0\,,\; u_1 > 0 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+2} = u_n^3 \times u_{n+1}^2$$

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; u_n > 0$
2. Pour tout entier n on pose : $t_n = \ln(u_n)$.
   (a) Montrer que la suite (t_n) est bien définie.
   (b) Montrer que la suite (t_n) est récurrente linéaire d'ordre deux.
   (c) En déduire t_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 5. :

1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes (sans préciser le domaine de dérivation) :
   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - e^{-x}}$
   (b) $g(x) = \sqrt{\ln(2x+1)}$
2. On considère la fonction f d'expression : $f(x) = \sqrt{|x^2 - x - 2|}$.
   (a) Déterminer son ensemble de définition.
   (b) Déterminer son domaine de dérivation.
   (c) Calculer sa dérivée.

Exercice 6. :

1. Soit $x \in \left[0, \dfrac{2\,\pi}{3}\right[$. En utilisant le cercle trigonométrique :
   (a) Donner le signe de $\sin x$
   (b) Étudier le signe de $\sin(3x)$.
   (c) Montrer que $\arcsin\left(\dfrac{1}{4}\right) \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$
2. Rappeler la formule $\cos(a+b)$ et e déduire que : $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta)$
3. Résoudre sur $\left[0, \dfrac{2\,\pi}{3}\right[$: $\left|\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right| = \dfrac{1}{4}$