Devoir Maison 7

À rendre lundi 3 février 2025

Exercice

Cet exercice propose d'étudier, en fonction d'un paramètre $\alpha > 0$, la nature (c'est-à-dire sa limite si elle existe) de la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 1\,,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha + n^\alpha}$$

1. Rappeler les variations des fonctions $(x \mapsto x^\alpha)$ suivant le réel α.
2. Dans cette question, on prend $\alpha > 0$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \geqslant 1\,,\ \frac{n^{1-\alpha}}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{1+n^\alpha}$$
   (b) En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ dans les cas $\alpha > 1$ et $0 < \alpha < 1$: dans chacun de ces deux cas, préciser la valeur de la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ si elle existe.
3. Dans cette question, on considère le cas $\alpha = 1$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
   (b) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
   (c) Montrer que $\ln(1+x) \leqslant x \leqslant -\ln(1-x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
   (d) En appliquant cette inégalité à $x = \dfrac{1}{k+n}$, montrer que :
   $$\forall n \geqslant 1\,,\ \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln 2$$
   (e) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.