Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2024/2025
Mme MOREL

DS 5 – Mathématiques

Mercredi 22 janvier 2025

Durée de l'épreuve : 2 heures 30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer**, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'un exercice et d'un problème.

Exercice 1. À partir des tableaux de variations suivants, donner une allure graphique de la courbe représentative de la fonction :

1.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Avec $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = 0^-$

2.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert\ 0$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	e

PROBLÉME

I. Étude de fonction

On considère la fonction f d'expression :

$$f(x) = x\, e^{\frac{1}{\ln(x)}}$$

1. Montrer que f est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$
2. Étudier les variations de f.
3. Calculer les limites de f en 0 $(x>0)$ et en 1.
4. On **ADMET** que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)\left(e^{\frac{1}{\ln(x)}} - 1\right) = 1$.
   En déduire que f admet une branche parabolique oblique de direction $y = x$ en $+\infty$
5. Donner une allure graphique de la courbe représentative de f.

II. Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = e \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} = f(u_n) = u_n\, e^{\frac{1}{\ln(u_n)}}$$

1. Dans le même repère que l'allure graphique de la courbe représentative de f, tracer le dynamisme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant e$
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

III. Langage `python`

On reprend la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la partie **II.**

1. Écrire une fonction `suite(n)` qui renvoie la valeur de u_n pour tout entier n.
2. Écrire une fonction `monotonie(n)` qui teste si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone jusqu'au rang n.
   D'après les résultats de la partie **II.**, que va renvoyer cette fonction quand on l'appelle dans la console pour un n fixé.
3. Écrire une fonction `seuil(M)` qui pour tout réel M, renvoie le premier n tel que $u_n \geqslant M$.