

Devoir Maison 9

À rendre lundi 17 mars 2025

Exercice 1.

On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}MP$. Quelle propriété particulière possède la matrice D ? En déduire D^n , pour tout entier n .
3. Justifier que $M = PDP^{-1}$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

Exercice 2.

On considère la fonction f d'expression :

$$f(x) = (x + \ln(x)) e^{x-1}$$

Étudier f sur son ensemble de définition \mathcal{D}_f ; en déduire que f est bijective de \mathcal{D}_f dans un intervalle J à préciser. Dresser le tableau de variations de f^{-1} et donner une allure graphique de la courbe représentative de f^{-1} .