Lycée Marcelin BERTHELOT
BCPST 1C – Année 2024/2025
Mme MOREL

DS 6 – Mathématiques

Mercredi 5 mars 2025

Durée de l'épreuve : 3 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, **la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements** entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à $\boxed{\textbf{encadrer}}$, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs et les conclusions de leurs raisonnements.

L'usage de document est interdit ainsi que celui de la calculatrice. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé d'un exercice et d'un problème.
L'informatique doit être traitée sur une feuille à part.

Exercice 1. (langage `python`)

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 4 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} = \frac{3}{4}\,u_n^2 - 2\,u_n + 3\,.$$

Écrire une fonction qui renvoie la liste des n premiers termes de la suite (u_n), soit $[u_0, \ldots, u_{n-1}]$

2. On considère la suite (S_n) définie par : pour tout réel x,

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\; S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,.$$

Écrire une fonction qui renvoie la liste des n premiers termes de la suite (S_n). (*On pourra montrer que* $S_{n+1} = S_n + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$)

3. On lance une pièce non truquée n fois, $n \geqslant 2$.
Écrire une fonction qui renvoie la liste des n lancers de la pièce. (*on pourra prendre la convention : 1 si on obtient Pile, 0 sinon*)

Exercice 2. Déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} X - X \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. :

1. Selon le paramètre réel λ, déterminer le rang et le nombre de solutions de :

$$\begin{cases} (1-\lambda)\,x - y - z = 0 \\ -3\,x + (3-\lambda)\,y - 3\,z = 0 \\ -x + y + (1-\lambda)\,z = 0 \end{cases}$$

2. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En déduire le rang de A et le rang de B. Les matrices A et B sont-elles inversibles ?

PROBLÈME

On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Dans ce problème, on cherche à calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par deux méthodes différentes.

I. Première méthode

1. Déterminer deux réels α et β tels que $M^2 + \alpha M + \beta I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.
2. La matrice M est-elle inversible ? Si oui, indiquer son inverse.
3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$.
4. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases} \qquad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = b_n - a_n, \\ b_{n+1} = 2a_n. \end{cases}$$

Montrer que la suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 .
En déduire une expression de a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis l'expression de M^n en fonction de M et I_3 et $n \in \mathbb{N}$.

II. Deuxième méthode

1. Pour tout $n \geqslant 1$, exprimer J^n en fonction de J.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $M = aI_3 + bJ$.
3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = (-2)^n I_3 + \dfrac{1-(-2)^n}{3} J$.
Cette formule est-elle valable pour $n = 0$?
4. Vérifier que cette expression est cohérente avec celle trouvée en I.4.

III. Une application

On considère les trois suites réelles $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies par :

$$u_0 = 1, v_0 = 0, w_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre X_{n+1}, X_n et M.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$.
3. En déduire l'expression des termes généraux de $(u_n), (v_n), (w_n)$.