

Devoir Maison 10

À rendre vendredi 24 mars 2025

Exercice 1.

Un joueur décide de jouer aux machines à sous. Il va jouer sur deux machines \mathcal{A} et \mathcal{B} qui sont réglées de la façon suivante:

- la probabilité de gagner sur la machine \mathcal{A} est de $\frac{1}{5}$,
- la probabilité de gagner sur la machine \mathcal{B} est de $\frac{1}{10}$.

Comme le joueur soupçonne les deux machines d'avoir des réglages différents, mais ne sait pas laquelle est la plus favorable, il décide d'adopter la stratégie suivante:

- il commence par choisir une machine au hasard,
- après chaque partie, il change de machine s'il vient de perdre; il rejoue sur la même machine s'il vient de gagner.

On définit pour tout $k \geq 1$, les événements suivants:

- G_k = "le joueur gagne la k -ième partie",
- A_k = "la k -ième partie se déroule sur la machine \mathcal{A} ".

1. Déterminer la probabilité de gagner la première partie.
2. Déterminer la probabilité de gagner la deuxième partie.
3. Sachant que la deuxième partie a été gagnée, quelle est la probabilité que la première partie ait eu lieu sur la machine \mathcal{A} ?
4. Soit $k \geq 1$.
 - (a) Exprimer $P(G_k)$ en fonction de $P(A_k)$.
 - (b) Montrer que $P(A_{k+1}) = -\frac{7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}$.
 - (c) En déduire $P(A_k)$ puis $P(G_k)$ en fonction de k .
 - (d) Pour $n \geq 1$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n P(G_k)$.
Calculer S_n .

Exercice 2.

Un système est formé de trois machines M_1 , M_2 et M_3 qui peuvent indépendamment tomber en panne avec des probabilités respectives : p_1 , p_2 et p_3 .

Le système tombe en panne dès que l'une au moins des trois machines est en panne.

Déterminer la probabilité que le système tombe en panne.