Cours Physique 08 **BCPST 1C**

- Dynamique d'un circuit électrique du 1er ordre : le circuit RC série -

Notions et contenus	Capacités exigibles
- Système à comportement capacitif : modèle du condensateur idéal. - Relation entre charge et tension électriques, entre intensité du courant électrique et tension électrique ; capacité d'un condensateur. - Continuité de la tension électrique aux bornes d'un condensateur. - Énergie stockée dans un condensateur.	*- Exploiter l'expression fournie de la capacité d'un condensateur plan. - Exploiter la condition de continuité de la tension électrique aux bornes d'un condensateur pour déterminer les conditions initiales dans un circuit.*
- Modèle du circuit RC série alimenté par une source idéale de tension.	*- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.*
- Charge d'un condensateur par une source de tension constante, décharge d'un condensateur, temps caractéristique.	*- Établir l'expression, en fonction du temps, de la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge et de sa décharge. - Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. **- (TP) Réaliser l'acquisition d'un signal électrique caractéristique d'un système du premier ordre et en étudier les caractéristiques.***
- Stockage et dissipation d'énergie.	*- Réaliser un bilan énergétique pour le circuit RC série*

Une montre connectée qui permet de déterminer la pulsation cardiaque de la personne qui la porte, un orage au cours duquel on observe des éclairs se formant entre les nuages et le sol, la manipulation de l'écran tactile d'une tablette ou d'un téléphone portable, le flash émis par un appareil photo … Tous ces phénomènes ont une origine commune : l'accumulation de charges électriques. De tels systèmes, susceptibles de provoquer l'accumulation de charges électriques au cours de leur fonctionnement, ont un ***comportement*** dit « ***capacitif*** ». Ils présentent de nombreuses analogies avec ce qui peut se passer dans un circuit électrique comportant un condensateur.

Voyons comment fonctionnent de tels systèmes …

I- Le modèle du condensateur idéal

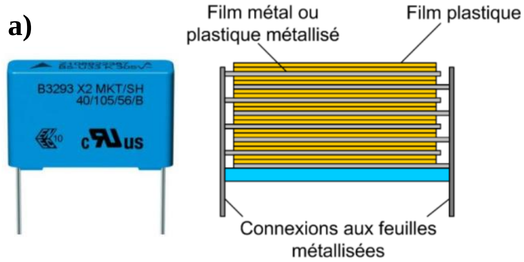
1) Définition et représentation symbolique

☛ ***Définition*** :

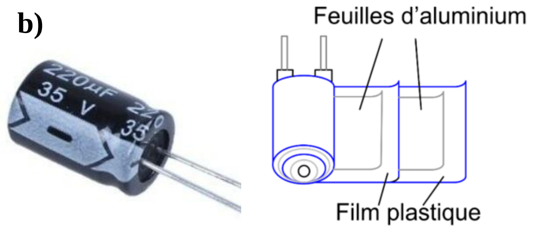
Les condensateurs se distinguent les uns des autres par :

- leur forme qui peut être plate **(a)**, cylindriques **(b)** … ;
- la nature de leurs armatures : celles-ci peuvent être en aluminium, en tantale, en dioxyde de manganèse … voire même aussi sous forme de gels électrolytiques ;
- la nature du diélectrique qui peut aussi bien être l'air (on parle alors de condensateur à air), le plastique, le papier, la céramique …

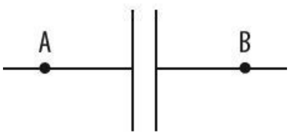
a)

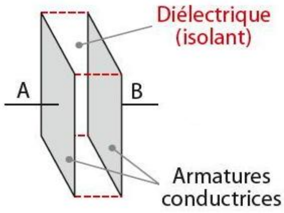


b)



☛ ***Représentation symbolique*** :



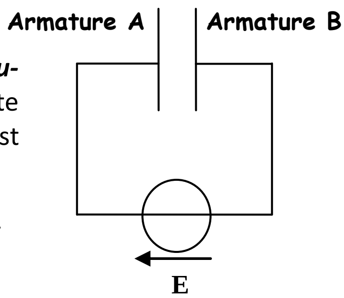


Sécurité *: pour chaque condensateur, il y a une tension maximale à ne pas dépasser, appelée «* ***tension de claquage*** *». Au-delà de celle-ci, le diélectrique est perforé et laisse passer les charges électriques, ce qui détériore le condensateur.*

2) Comportement capacitif d'un condensateur

Le <u>**comportement CAPACITIF**</u> d'un condensateur (c'est-à-dire son ***aptitude à pouvoir accumuler des charges électriques opposées sur chacune de ses surfaces conductrices***), se manifeste uniquement lorsqu'une tension électrique est appliquée entre ses armatures. Cette propriété est notamment liée à la présence du diélectrique.

✍ ***Application 1*** : *Justifier le comportement capacitif du condensateur à l'aide du circuit ci-contre.*



☛ ***La CAPACITE d'un condensateur*** :

La CAPACITE d'un condensateur est une grandeur, notée C, exprimée en Farad (F), qui est d'autant plus grande que le condensateur peut accumuler un grand nombre de charges électriques sur ses armatures.

A l'exception des supercondensateurs dont les capacités peuvent atteindre la centaine de farad, la capacité des condensateurs usuels varie ***de quelques picofarads*** (1 pF = 10^{-12} F) ***à quelques millifarads***. On montre que cette capacité est :

- proportionnelle à la **surface S des armatures** en regard ;
- inversement proportionnelle à la **distance e séparant les armatures** ;
- proportionnelle à la **permittivité ε du diélectrique** : plus sa valeur est élevée, plus le diélectrique s'oppose au passage des électrons.

Formule fournie

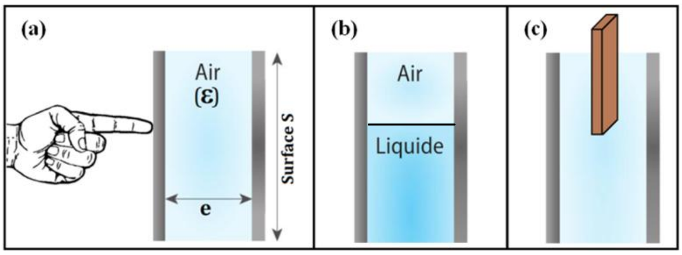
	Air	Plastique	Papier	Verre	Eau distillée
Permittivité ε (en $F.m^{-1}$)	$8{,}9.10^{-12}$	$1{,}8.10^{-11}$	$3{,}3.10^{-11}$	$4{,}4.10^{-11}$	$7{,}1.10^{-10}$
Permittivité relative ε_r	1,0	2,0	3,7	5,0	80

Pour un matériau donné de permittivité ε, on définit la permittivité relative $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$ *où* ε_0 *est la permittivité du vide (*$\varepsilon_0 = 8{,}9.10^{-12}\ F.m^{-1}$*). Cette grandeur est sans unité et est toujours supérieure à 1.*

☛ ***Application aux capteurs capacitifs*** :

L'influence des grandeurs S, e et ε sur la valeur de la capacité permet d'expliquer le fonctionnement des capteurs capacitifs : il s'agit de ***dispositifs dont la capacité varie en fonction d'un des trois paramètres précédents***.

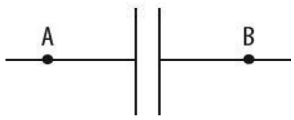
✍ ***Application 2*** : *Quel paramètre est modifié dans chacune des trois actions schématisées ci-contre ?*



3) Relations entre grandeurs électriques

a/ Relation entre charge et tension électrique

Soit :
- **C** la **capacité** du condensateur ;
- $\mathbf{u_C}$ la **tension électrique** aux bornes du condensateur ;
- **q** la **charge électrique** de l'armature du condensateur *pointée par la flèche de tension* $\mathbf{u_C}$.



(**Attention** ! « **q** » *peut être positive, négative ou nulle …*)

Vocabulaire

- *Si |**q**| augmente, on dit que le condensateur* ***se charge*** *; si |**q**| diminue, on dit qu'il* ***se décharge***.
- *Si* **q ≠ 0**, *on dit que le condensateur* ***est chargé*** *; si* **q = 0**, *on dit que le condensateur* ***est déchargé***.

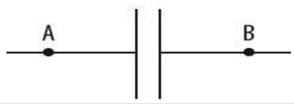
D'un point de vue physique, **la charge apparait aux armatures du condensateur *de façon progressive***, au fur et à mesure que les électrons arrivent. En conséquence, **la charge *ne varie pas brusquement* au niveau des armatures mais de façon *continue*** (au sens mathématique du terme), et cela même si on fait passer instantanément l'intensité i du courant d'une valeur nulle dans le circuit à une valeur non nulle, par exemple en fermant un interrupteur.

➡ **Conséquence** :

b/ Relation entre intensité du courant électrique et tension électrique

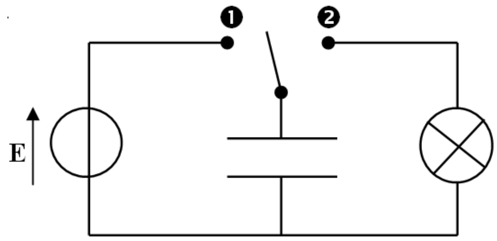
La relation $\mathbf{q = C \times u_C}$ donnée précédemment est valable à tout instant (à condition que l'armature pointée par la flèche de tension soit celle notée « **q** »). Si on dérive chaque membre par rapport au temps, on obtient la relation :

Cette relation Intensité-Tension ***n'est valable qu'en*** **CONVENTION RECEPTEUR** !



4) Energie stockée dans un condensateur

☛ ***Expérience*** : https://www.youtube.com/watch?v=y_luASMIFjM



On réalise le circuit ci-contre dans lequel le générateur délivre une tension continue **E = 10 V**. Un voltmètre indique la valeur de la tension aux bornes du condensateur. Qu'observe-t-on quand :

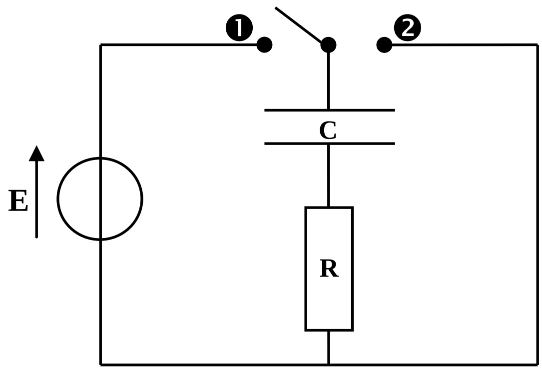
- *on bascule l'interrupteur sur la position* ❶ (de **00:27** à **00:42**) ?

- *on bascule ensuite l'interrupteur sur la position* ❷ (de **00:42** à **00:56**) ?

☛ ***Interprétation*** :

L'***énergie électrique E_C stockée par un condensateur*** vérifie la relation :

II- Modèle du circuit RC série

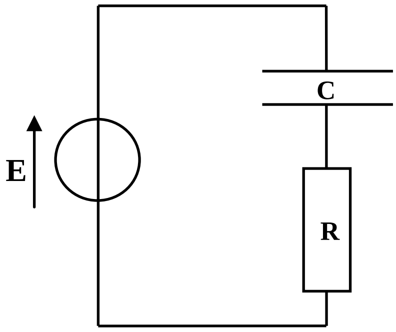


On appelle **circuit RC série** l'association en série d'un condensateur de **capacité C** et d'un conducteur ohmique de **résistance R**. Dans la suite, on s'intéressera au montage dessiné ci-contre.

Dans le paragraphe **II.1)**, nous étudierons la ***charge*** du condensateur en plaçant l'interrupteur sur la position ❶. Puis dans le paragraphe **II.2)**, nous étudierons la ***décharge*** du condensateur en basculant l'interrupteur de la position ❶ vers la position ❷.

1) CHARGE du condensateur

a/ Présentation de la situation



A t = 0, on bascule l'interrupteur sur la position ❶ : le circuit se résume donc au schéma ci-contre où sont associés en série un condensateur de capacité C, un conducteur ohmique de résistance R et une source idéale de tension de f.e.m. E constante.

➨ **Conditions initiales** : on suppose qu'avant de basculer l'interrupteur sur la position ❶, le condensateur est ***déchargé***. Que peut-on alors dire de la tension u_C aux bornes du condensateur à t = 0 ?

b/ Equation différentielle vérifiée par u_C

On cherche ici à établir une équation faisant intervenir $\mathbf{u_C}$ et sa dérivée temporelle $\mathbf{d(u_c) / dt}$.

☛ ***Loi des mailles*** :

☛ ***Loi d'Ohm associée au conducteur ohmique*** :

☛ ***Expression de l'intensité du courant électrique traversant le condensateur*** :

☛ ***Réexpression de la loi des mailles*** :

c/ Résolution de l'équation différentielle vérifiée par u_C

On cherche ici à trouver la solution générale de l'équation différentielle établie précédemment, c'est-à-dire ***l'expression temporelle de*** u_c ***qui vérifie cette équation différentielle***. Pour cela, on procède en deux temps : on cherche d'abord la ***solution particulière***, puis on cherche la ***solution générale de l'équation homogène***. La solution recherchée est alors la ***somme de ces deux solutions***.

☛ ***Solution particulière*** : il s'agit d'une expression de u_C « évidente » qui doit être une constante puisque le second membre (E) de notre équation différentielle est une constante :

☛ ***Solution de l'équation homogène*** :
Il s'agit d'une expression de u_C qui est solution de l'équation différentielle sans le second membre.

Si l'équation homogène (H) est : $\boxed{ay' + by = 0}$

l'ensemble $\mathcal{S}_H$ *des solutions de* (H) *est :*

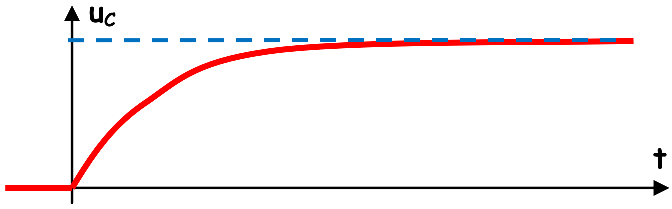
$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{x \mapsto Ke^{-\frac{b}{a}x}, K \in \mathbb{R}\right\}}$$

Extrait du cours de Mathématiques de Mme MOREL
« Equations différentielles linéaires »

☛ ***Solution générale de l'équation différentielle*** :
C'est la somme de la solution particulière u_{C1} et de la solution de l'équation homogène u_{C2} :

☛ ***Utilisation de la condition initiale pour trouver la valeur de la constante K*** :

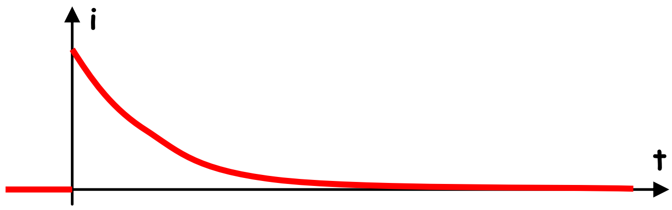
☛ ***Evolution de la tension u_C aux bornes du condensateur en fonction du temps au cours de la charge*** :



d/ L'intensité i du courant électrique

☛ ***Expression de i en fonction du temps*** :

☛ ***Evolution de l'intensité i du courant électrique traversant le circuit RC en fonction du temps au cours de la charge*** :



e/ Temps caractéristique de la charge

☛ ***Expression*** :

✍ ***Application 4*** : *Par une analyse dimensionnelle, vérifier que le produit* R×C *est homogène à une durée.*

☛ ***Interprétation*** :

✍ ***Application 5*** : *A l'aide de l'expression de* $\mathbf{u_C}$ *établie au* **II.1.b)**, *vérifier l'affirmation précédente.*

☛ ***Détermination graphique*** :

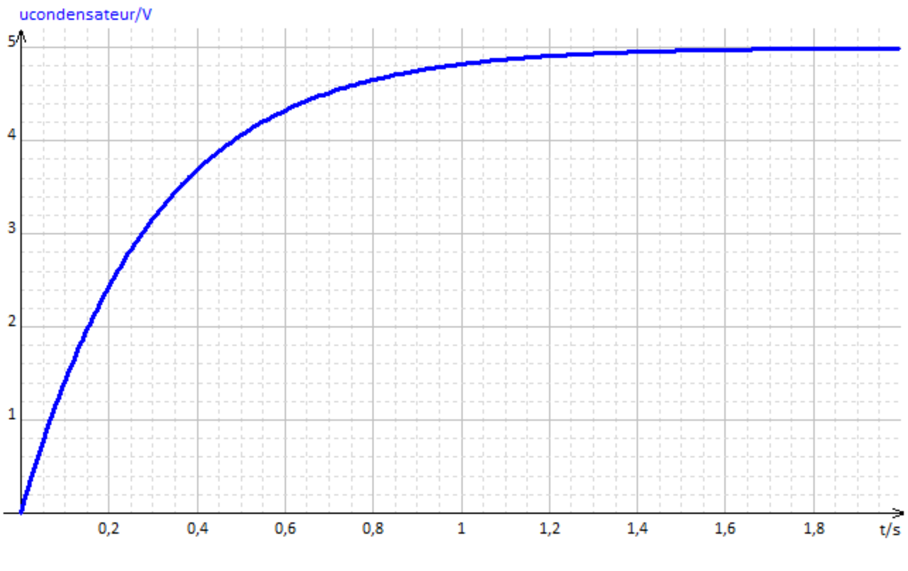
METHODE 1 : méthode de la charge à 63 %

On repère l'abscisse du graphique $\mathbf{u_C = f(t)}$ pour laquelle la tension **u_C est égale à 0,63 x E**.

METHODE 2 : méthode de la tangente à l'origine

On repère l'abscisse du point de croisement de l'asymptote horizontale du graphique $\mathbf{u_C = f(t)}$ et de la tangente à l'origine de ce même graphique

✍ ***Application 6*** : *Déterminer la constante de temps* τ *du circuit dont l'évolution de la tension* $\mathbf{u_C}$ *aux bornes du condensateur est représentée sur le graphique ci-contre.*



e/ Bilan de puissance et d'énergie

Reprenons l'équation obtenue en appliquant la loi des mailles au **II-1.b)** et multiplions-là par **« i »**. On obtient le **bilan de PUISSANCE** suivant :

Si on multiplie le bilan de puissance précédent par une petite durée **dt** (durée élémentaire), on obtient le **bilan d'ENERGIE** suivant :

On peut alors calculer ***l'énergie délivrée par le générateur, l'énergie stockée par le condensateur et celle reçue par le conducteur ohmique pendant toute la durée de la charge*** en intégrant la relation précédente entre t = 0 et t → + ∞. En effet, les grandeurs **u** et **i** varient pendant toute l'étude.

• **Energie algébriquement FOURNIE par le générateur** :

$$\int_0^{\infty} \mathbf{E} \times \mathbf{i} \times \mathbf{dt} = \int_0^{\infty} \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}} \times \mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}} \times \mathbf{dt} = \frac{\mathbf{E}^2}{\mathbf{R}} \times \int_0^{\infty} \mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}} \times \mathbf{dt} = \frac{\mathbf{E}^2}{\mathbf{R}} \times \left[-\mathbf{RC}\,\mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}}\right]_0^{\infty} = \frac{\mathbf{E}^2}{\mathbf{R}} \times [-\mathbf{RC} \times \mathbf{0} - (-\mathbf{RC} \times \mathbf{1})]$$

soit $\mathbf{E_{générateur}} = \mathbf{CE^2}$

• **Energie algébriquement RECUE par le condensateur** :

$$\int_0^{\infty} \mathbf{u_C} \times \mathbf{i} \times \mathbf{dt} = \int_0^{\infty} \mathbf{E} \times \left(\mathbf{1} - \mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}}\right) \times \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}} \times \mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}} \times \mathbf{dt} = \frac{\mathbf{E}^2}{\mathbf{R}} \times \int_0^{\infty} \left(\mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}} - \mathbf{e}^{-\frac{2t}{RC}}\right) \times \mathbf{dt} = \frac{\mathbf{E}^2}{\mathbf{R}} \times \left[-\mathbf{RC}\,\mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}} + \frac{\mathbf{RC}}{\mathbf{2}}\mathbf{e}^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^{\infty}$$

soit $\mathbf{E_{condensateur}} = \frac{\mathbf{E}^2}{\mathbf{R}} \times \left[-\mathbf{RC} \times \mathbf{0} + \frac{\mathbf{RC}}{\mathbf{2}} \times \mathbf{0} - \left(-\mathbf{RC} + \frac{\mathbf{RC}}{\mathbf{2}}\right)\right]$ et finalement, $\mathbf{E_{condensateur}} = \frac{\mathbf{CE^2}}{\mathbf{2}}$

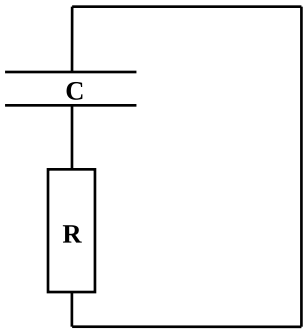
• **Energie algébriquement RECUE par le conducteur ohmique** :

$$\int_0^{\infty} \mathbf{u_R} \times \mathbf{i} \times \mathbf{dt} = \int_0^{\infty} \mathbf{R} \times \mathbf{i}^2 \times \mathbf{dt} = \int_0^{\infty} \mathbf{R} \times \frac{\mathbf{E}^2}{\mathbf{R}^2} \times \mathbf{e}^{-\frac{2t}{RC}} \times \mathbf{dt} = \frac{E^2}{R} \times \int_0^{\infty} \mathbf{e}^{-\frac{2t}{RC}} \times \mathbf{dt} = \frac{E^2}{R} \times \left[-\frac{\mathbf{RC}}{\mathbf{2}}\mathbf{e}^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^{\infty}$$

soit $\mathbf{E_{conducteur\ ohmique}} = \frac{\mathbf{E}^2}{\mathbf{R}} \times \left[-\frac{\mathbf{RC}}{\mathbf{2}} \times \mathbf{0} - \left(-\frac{\mathbf{RC}}{\mathbf{2}}\right)\right]$ et finalement, $\mathbf{E_{conducteur\ ohmique}} = \frac{\mathbf{CE^2}}{\mathbf{2}}$

2) DECHARGE du condensateur

a/ Présentation de la situation



Une fois le régime permanent atteint avec l'interrupteur placé en position ❶ (voir le schéma du circuit en introduction du paragraphe **II-**), on bascule l'interrupteur en position ❷ à une **nouvelle date origine t = 0**. Le circuit se résume donc à la maille ci-contre ne contenant que le condensateur de capacité **C** et le conducteur ohmique de résistance **R**.

➡ **Conditions initiales** : on suppose qu'avant de basculer l'interrupteur sur la position ❷, le condensateur est chargé. Que vaut alors la tension $\mathbf{u_C}$ aux bornes du condensateur à **t = 0** ?

b/ Equation différentielle vérifiée par u_C

On cherche de nouveau à établir une équation faisant intervenir $\mathbf{u_C}$ et sa dérivée temporelle $\mathbf{d(u_c) / dt}$.

☛ ***Loi des mailles*** :

☛ ***Loi d'Ohm associée au conducteur ohmique*** :

☛ ***Expression de l'intensité du courant électrique traversant le condensateur*** :

☛ ***Réexpression de la loi des mailles*** :

c/ Résolution de l'équation différentielle vérifiée par u_C

On cherche ici à trouver la solution générale de l'équation différentielle établie précédemment, c'est-à-dire ***l'expression temporelle de*** $\mathbf{u_c}$ ***qui vérifie cette équation différentielle***.

Or, dans le cas de la décharge, l'équation différentielle n'a pas de second membre : la solution générale de cette équation différentielle de décharge s'identifie donc à la solution de l'équation homogène obtenue lors de la charge du condensateur (cela revient à dire que la solution particulière est nulle …).

☛ ***Solution générale de l'équation différentielle*** :

☛ ***Utilisation de la condition initiale pour trouver la valeur de la constante K*** :

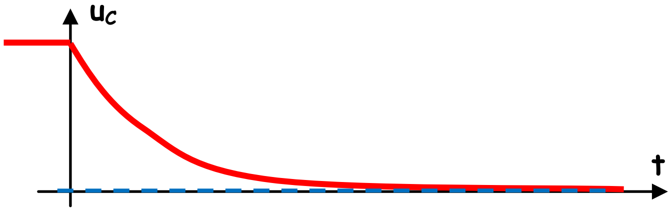
Si l'équation homogène (H) est : $\boxed{ay' + by = 0}$

l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (H) est :

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{x \mapsto Ke^{-\frac{b}{a}x}, K \in \mathbb{R}\right\}}$$

Extrait du cours de Mathématiques de Mme MOREL
« Equations différentielles linéaires »

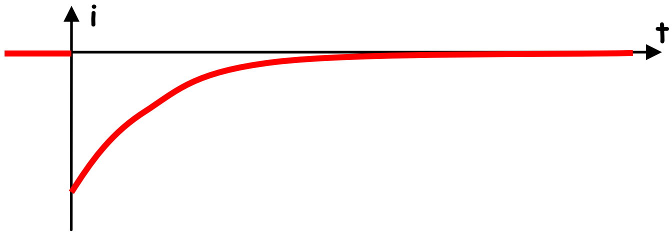
☛ ***Evolution de la tension u_C aux bornes du condensateur en fonction du temps au cours de la décharge*** :



d/ L'intensité i du courant électrique

☛ ***Expression de i en fonction du temps*** :

☛ ***Evolution de l'intensité i du courant électrique traversant le circuit RC en fonction du temps au cours de la décharge*** :



e/ Temps caractéristique de la décharge

☛ ***Expression*** :

☛ ***Interprétation*** :

✍ ***Application 7*** : *A l'aide de l'expression de* u_C *établie au* **II.2.b)**, *vérifier l'affirmation précédente.*

☛ ***Détermination graphique*** :

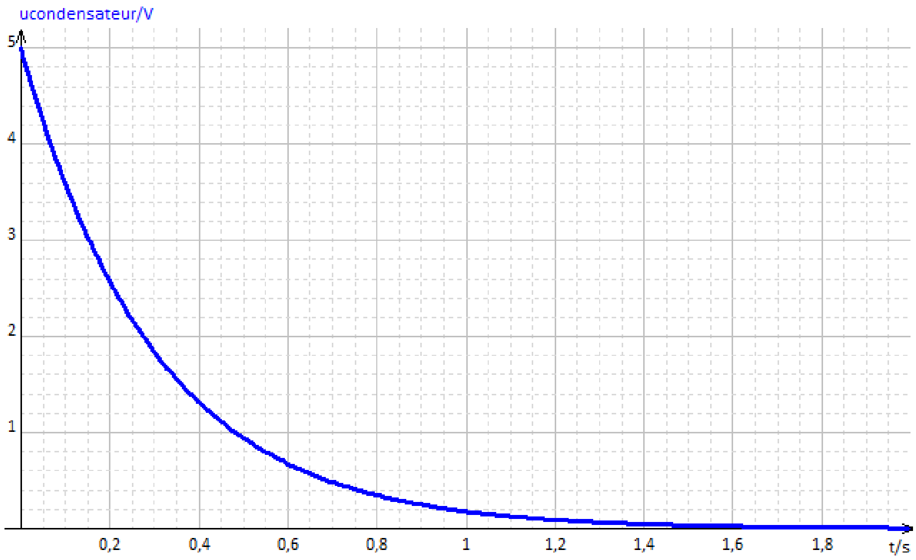
METHODE 1 : méthode de la décharge à 63 %

On repère l'abscisse du graphique u_C = **f(t)** pour laquelle la tension **u_C est égale à 0,37 x E**.

METHODE 2 : méthode de la tangente à l'origine

On repère l'abscisse du point de croisement de l'asymptote horizontale du graphique u_C = **f(t)** et de la tangente à l'origine de ce même graphique

✍ ***Application 8*** : *Déterminer la constante de temps τ du circuit dont l'évolution de la tension $\mathbf{u_C}$ aux bornes du condensateur est représentée sur le graphique ci-contre.*



f/ Bilan de puissance et d'énergie

Reprenons l'équation obtenue en appliquant la loi des mailles au **II-2.b)** et multiplions-là par **« i »**. On obtient le **bilan de PUISSANCE** suivant :

Si on multiplie le bilan de puissance précédent par une petite durée **dt** (durée élémentaire), on obtient le **bilan d'ENERGIE** suivant :

De même que pour la charge du condensateur, on peut déterminer ***l'énergie libérée par le condensateur et celle reçue par le conducteur ohmique tout au long de la décharge*** en intégrant cette relation entre t = 0 et t → + ∞ :

• **Energie algébriquement RECUE par le condensateur** :

$$\int_0^\infty \mathbf{u_C \times i \times dt} = \int_0^\infty \mathbf{E \times e^{-\frac{t}{RC}} \times \left(\frac{-E}{R} \times e^{-\frac{t}{RC}}\right) \times dt} = \mathbf{\frac{-E^2}{R} \times \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}} \times dt} = \mathbf{\frac{-E^2}{R} \times \left[-\frac{RC}{2}\, e^{-\frac{t}{RC}}\right]_0^\infty}$$

$$\text{soit } \mathbf{E_{condensateur}} = \mathbf{\frac{-E^2}{R} \times \left[-\frac{RC}{2} \times 0 - \left(-\frac{RC}{2} \times 1\right)\right]} \qquad \text{et finalement,} \qquad \mathbf{E_{condensateur} = -\frac{CE^2}{2}}$$

• **Energie algébriquement RECUE par le conducteur ohmique** :

$$\int_0^\infty \mathbf{u_R \times i \times dt} = \int_0^\infty \mathbf{R \times i^2 \times dt} = \int_0^\infty \mathbf{R \times \frac{E^2}{R^2} \times e^{-\frac{2t}{RC}} \times dt} = \frac{E^2}{R} \times \int_0^\infty \mathbf{e^{-\frac{2t}{RC}} \times dt} = \frac{E^2}{R} \times \mathbf{\left[-\frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^\infty}$$

$$\text{soit } \mathbf{E_{conducteur\ ohmique}} = \mathbf{\frac{E^2}{R} \times \left[-\frac{RC}{2} \times 0 - \left(-\frac{RC}{2} \times 1\right)\right]} \qquad \text{et finalement,} \qquad \mathbf{E_{conducteur\ ohmique} = \frac{CE^2}{2}}$$