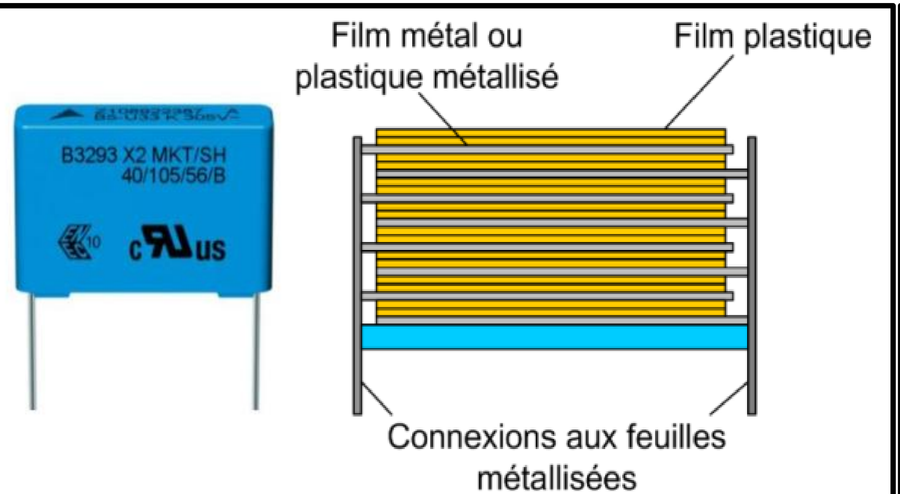
# - Dynamique d'un circuit électrique du $1^{er}$ ordre : le circuit RC série -

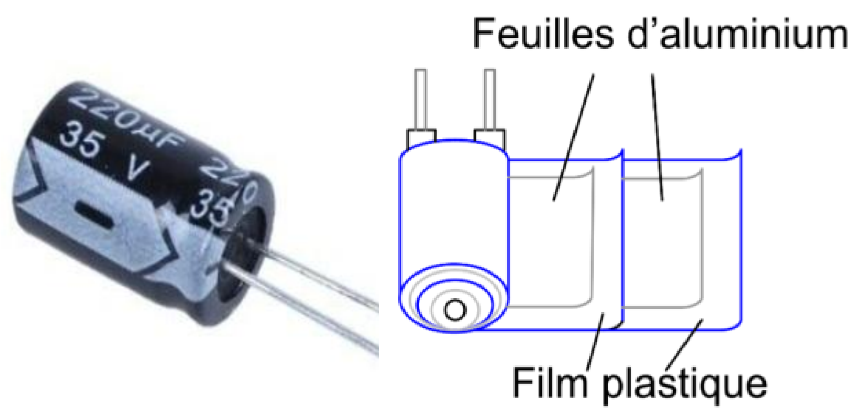
| Notions et contenus | Capacités exigibles |
|---|---|
| *- Système à comportement capacitif : modèle du condensateur idéal.*<br>*- Relation entre charge et tension électriques, entre intensité du courant électrique et tension électrique ; capacité d'un condensateur.*<br>*- Continuité de la tension électrique aux bornes d'un condensateur.*<br>*- Énergie stockée dans un condensateur.* | *- Exploiter l'expression fournie de la capacité d'un condensateur plan.*<br>*- Exploiter la condition de continuité de la tension électrique aux bornes d'un condensateur pour déterminer les conditions initiales dans un circuit.* |
| *- Modèle du circuit RC série alimenté par une source idéale de tension.* | *- Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.* |
| *- Charge d'un condensateur par une source de tension constante, décharge d'un condensateur, temps caractéristique.* | *- Établir l'expression, en fonction du temps, de la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge et de sa décharge.*<br>*- Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.*<br>**- (TP)** ***Réaliser l'acquisition d'un signal électrique caractéristique d'un système du premier ordre et en étudier les caractéristiques.*** |
| *- Stockage et dissipation d'énergie.* | *- Réaliser un bilan énergétique pour le circuit RC série* |


# I- Le modèle du condensateur idéal

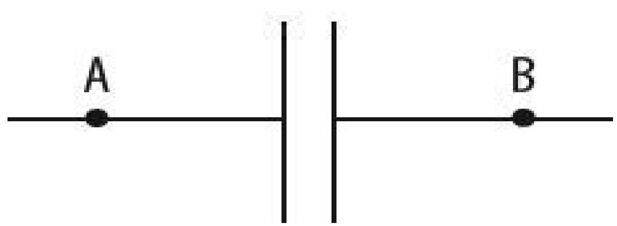
## 1) Définition et représentation symbolique

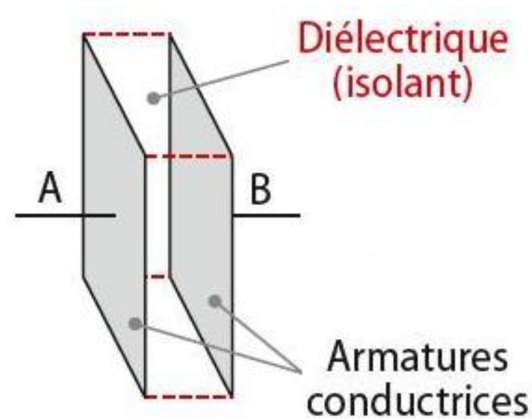
☛ ***Définition*** : Un **CONDENSATEUR** est un système constitué de ***deux surfaces conductrices*** en regard, appelées **armatures**, ***séparées par un matériau isolant***, appelé **diélectrique**.




☛ ***Représentation symbolique*** :

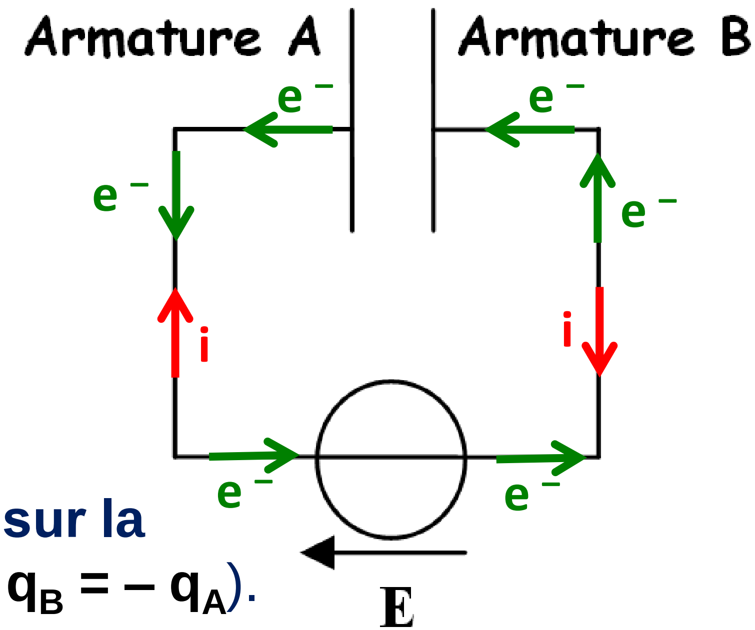


## 2) Comportement capacitif d'un condensateur

Aptitude à pouvoir ***accumuler des charges électriques*** opposées sur chacune de ses surfaces conductrices

✍ ***Application 1*** *: Justifier le comportement capacitif du condensateur à l'aide du circuit électrique ci-contre.*




La présence du générateur impose la circulation d'un courant électrique :

- Des $e^-$ sont **arrachés de la plaque A** qui **se charge positivement** (charge $\mathbf{q_A}$) ;
- A cause du diélectrique, c**es $e^-$ s'accumulent sur la plaque B** qui **se charge négativement** (charge $\mathbf{q_B = -q_A}$).

☛ ***La CAPACITE d'un condensateur*** : De quelques **pF** (**$10^{-12}$ F**) à **mF** (**$10^{-3}$ F**)

- Proportionnelle à :
  - # la **surface S des armatures** en regard ;
  - # la **permittivité ε du diélectrique** ;
- Inversement proportionnelle à :
  - # la **distance e séparant les armatures**

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon \times S}{e}}$$

C en F ; ε en $F.m^{-1}$ ; S en $m^2$ ; e en m

## ☛ ***La CAPACITE d'un condensateur*** :

*Pour un matériau donné de* **permittivité ε**, *on définit la* **permittivité relative** $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$ *où* $\varepsilon_0$ *est la* **permittivité du vide** *(*$\varepsilon_0 = 8{,}9.10^{-12}\ \text{F.m}^{-1}$*). Cette grandeur est sans unité et est toujours supérieure à 1.*

**(formule fournie)**

$$\underbrace{C}_{\text{en F}} = \frac{\overbrace{\varepsilon}^{\text{en F.m}^{-1}} \times \overbrace{S}^{\text{en m}^2}}{\underbrace{e}_{\text{en m}}}$$

| | Air | Plastique | Papier | Verre | Eau distillée |
|---|---|---|---|---|---|
| Permittivité ε (en $\text{F.m}^{-1}$) | $8{,}9.10^{-12}$ | $1{,}8.10^{-11}$ | $3{,}3.10^{-11}$ | $4{,}4.10^{-11}$ | $7{,}1.10^{-10}$ |
| Permittivité relative $\varepsilon_r$ | 1,0 | 2,0 | 3,7 | 5,0 | 80 |

## ☛ ***Application aux capteurs capacitifs*** :

Dispositifs dont **la capacité varie en fonction de** **e**, **S** et **ε**

✍ ***Application 2*** : *Quel paramètre est modifié dans chacune des actions schématisées ci-contre ?*

☛ ***La capacité d'un condensateur*** :

*Pour un matériau donné de* **permittivité ε**, *on définit la* **permittivité relative** $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$ *où* $\varepsilon_0$ *est la* **permittivité du vide** *(*$\varepsilon_0 = 8{,}9.10^{-12}\ F.m^{-1}$*). Cette grandeur est sans unité et est toujours supérieure à 1.*

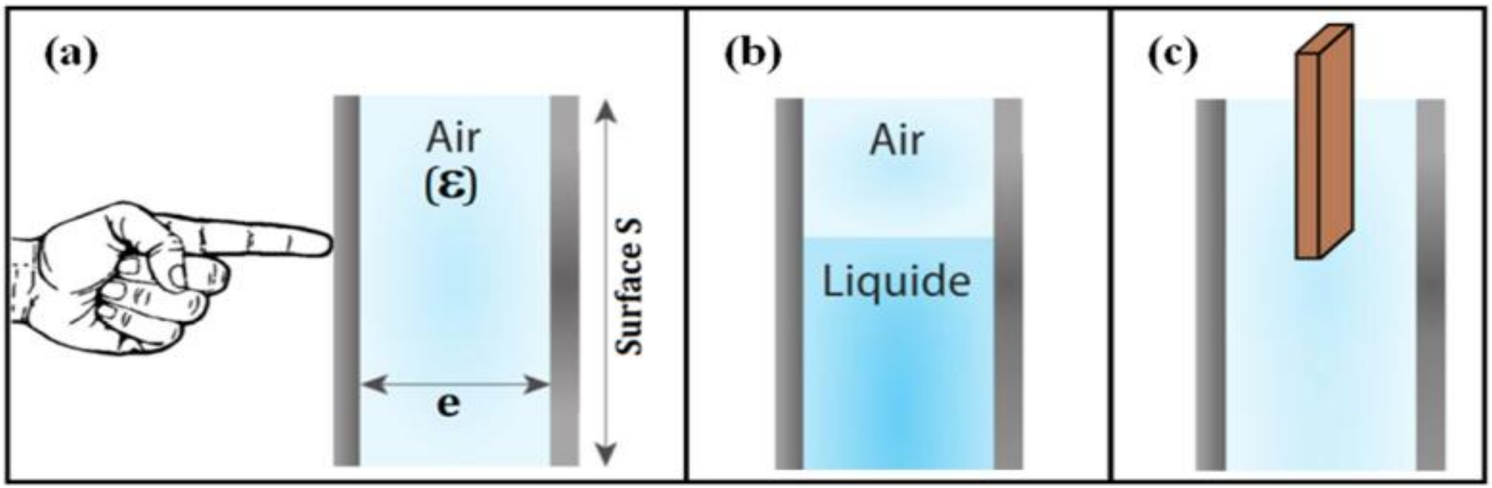
**(formule fournie)**

$$C = \frac{\varepsilon \times S}{e}$$

en F.m$^{-1}$ ($\varepsilon$) ; en m$^2$ ($S$) ; en F ($C$) ; en m ($e$)

☛ ***Application aux capteurs capacitifs*** :

✍ ***Application 2*** : *Quel paramètre est modifié dans chacune des actions ci-dessous ?*




a) **diminution de « e »** donc augmentation de la capacité (montre connectée, déclenchement airbag …)

b) **changement de « ε »** car changement de milieu (capteur de remplissage)

c) **diminution de « S »** donc diminution de capacité (capteur de déplacement)

✍ ***Application 2*** *: Quel paramètre est modifié dans chacune des actions ci-dessous ?*

a) **diminution de « e »** donc augmentation de la capacité (montre connectée, déclenchement airbag …)

b) **changement de « ε »** car changement de milieu (capteur de remplissage)

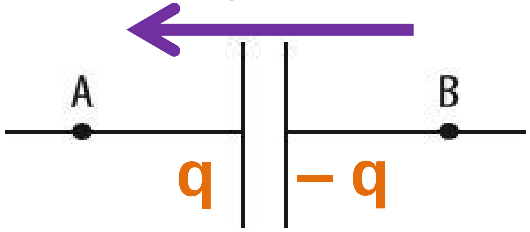
c) **diminution de « S »** donc diminution de capacité (capteur de déplacement)

## 3) Relation entre grandeurs électriques

### a/ Relation entre CHARGE et TENSION ELECTRIQUE

Soit :
- **C** la **capacité** du condensateur ;
- $u_C$ la **tension électrique** aux bornes du condensateur ;
- **q** la **charge électrique** de l'armature du condensateur pointée par la flèche de tension $u_C$ .

$u_C = u_{AB}$




$$\boxed{q = C \times u_C}$$

En Coulomb (C) — en Farad (F) — en Volt (V)


**|q|** ↗ : le condensateur ***se charge*** ;

**|q|** ↘ : le condensateur ***se décharge*** ;

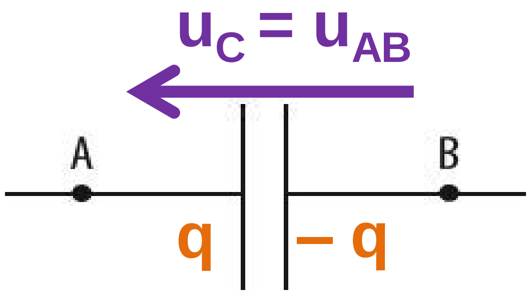
**|q| ≠ 0** : le condensateur ***est chargé*** ;

**q = 0** : le condensateur ***est déchargé*** ;

# 3) Relation entre grandeurs électriques

## a/ Relation entre CHARGE et TENSION ELECTRIQUE

Soit :
- **C** la **capacité** du condensateur ;
- $u_C$ la **tension électrique** aux bornes du condensateur ;
- **q** la **charge électrique** de l'armature du condensateur pointée par la flèche de tension $u_C$ .




En Coulomb (C)

$$\boxed{q = C \times u_C}$$

en Farad (F))

en Volt (V)


**|q| ↗** : le condensateur ***se charge*** ;

**|q| ↘** : le condensateur ***se décharge*** ;

**|q| ≠ 0** : le condensateur ***est chargé*** ;

**q = 0** : le condensateur ***est déchargé*** ;

La charge électrique apparaît sur les armatures ***de façon progressive***

➡ ***Conséquence*** : ***La charge électrique*** **q** ***varie de façon continue*** (au sens mathématique du terme), ***tout comme la tension électrique*** $u_C$ aux bornes du condensateur.

## La charge électrique apparaît sur les armatures ***de façon progressive***

➡ ***Conséquence*** : ***La charge électrique*** **q** ***varie de façon continue*** (au sens mathématique du terme), ***tout comme la tension électrique*** $\mathbf{u_C}$ aux bornes du condensateur.

## b/ Relation Intensité-Tension

La relation $\mathbf{q = C \times u_C}$ donnée précédemment est valable à tout instant. Si l'on dérive chaque membre par rapport au temps, on obtient la relation :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d(C \times u_C)}{dt} \Leftrightarrow \boxed{i = C \times \frac{d\,u_C}{dt}}$$

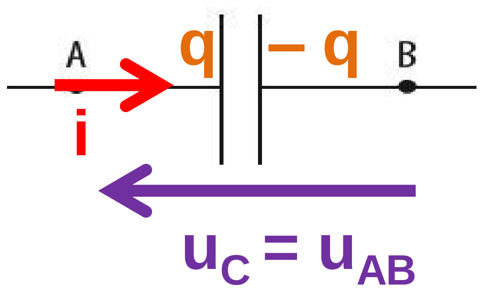
en Volt (V)

si on suppose la capacité constante

en Ampère (A)

en Farad (F)

en seconde (s)




Cette relation n'est valable qu'en convention RECEPTEUR !

(En convention générateur, on aurait $i = -\dfrac{dq}{dt} = -C \times \dfrac{d\,u_C}{dt}$ )

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d(C \times u_C)}{dt} \Leftrightarrow \boxed{i = C \times \frac{d\,u_C}{dt}}$$

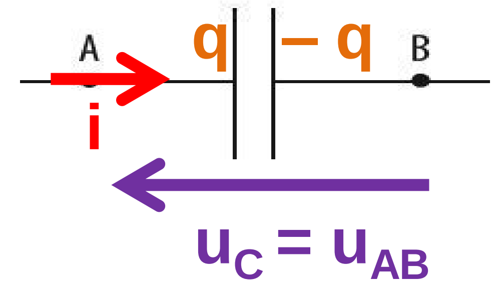
en Volt (V)

si on suppose la capacité constante

en seconde (s)

en Ampère (A)

en Farad (F)




(En <u>convention générateur</u>, on aurait $i = -\frac{dq}{dt} = -C \times \frac{d\,u_C}{dt}$ )

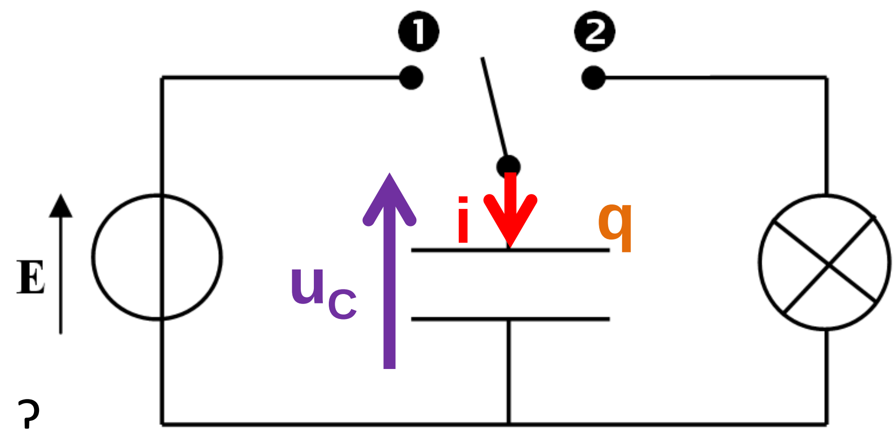
## 4) <u>Energie stockée dans un condensateur</u>

Expérience : https://www.youtube.com/watch?v=y_luASMIFjM

Qu'observe-t-on quand :

- <u>*on bascule l'interrupteur sur ❶*</u> ?

La tension $u_C$ passe ***progressivement*** de 0 V à environ 10 V : **<u>le condensateur SE CHARGE progressivement</u>**.




- <u>*on bascule ensuite l'interrupteur sur ❷*</u> ?

La tension $u_C$ passe ***progressivement*** de 10 V à environ 0 V : **<u>le condensateur SE DECHARGE progressivement</u>** et ***fournit de l'énergie*** à la lampe qui se met à briller.

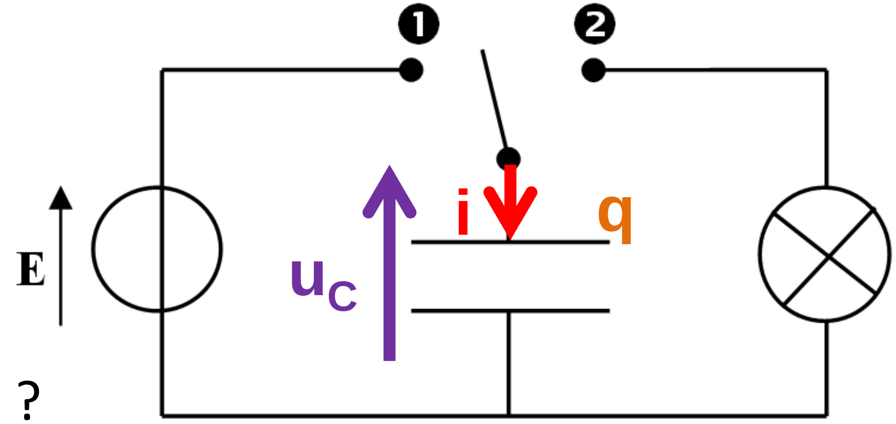
## 4) Energie stockée dans un condensateur

Expérience : https://www.youtube.com/watch?v=y_luASMIFjM

Qu'observe-t-on quand :

- *on bascule l'interrupteur sur ❶* ?

La tension $u_C$ passe ***progressivement*** de 0 V à environ 10 V : **le condensateur SE CHARGE progressivement**.




- *on bascule ensuite l'interrupteur sur ❷* ?

La tension $u_C$ passe ***progressivement*** de 10 V à environ 0 V : **le condensateur SE DECHARGE progressivement** et ***fournit de l'énergie*** à la lampe qui se met à briller.

☛ ***Interprétation*** : Au cours de la charge, le condensateur ***emmagasine de l'énergie*** qu'il **stocke**. Lors de la décharge, il ***libère*** cette énergie.

L'***énergie électrique $E_C$ stockée par un condensateur*** vérifie la relation :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} \times C \times u_C^2}$$

en Joule (J) ; en Farad (F) ; en Volt (V)

☛ ***Interprétation*** : Au cours de la charge, le condensateur ***emmagasine de l'énergie*** qu'il **stocke**. Lors de la décharge, il ***libère*** cette énergie.

L'***énergie électrique*** $E_C$ ***stockée par un condensateur*** vérifie la relation :

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2} \times C \times u_C^2}$$

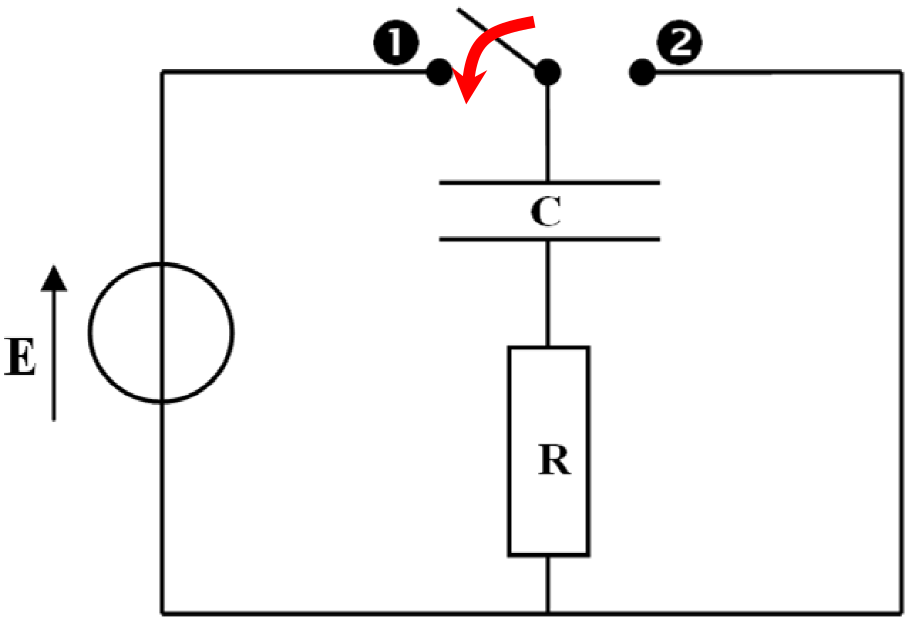
en Joule (J)

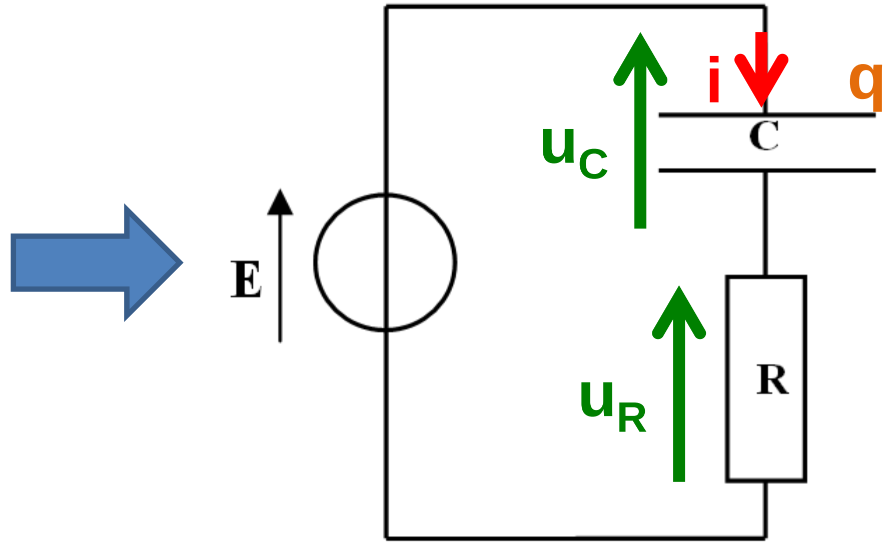
en Farad (F)

en Volt (V)

## II- Le modèle du circuit RC série

### 1) CHARGE du condensateur



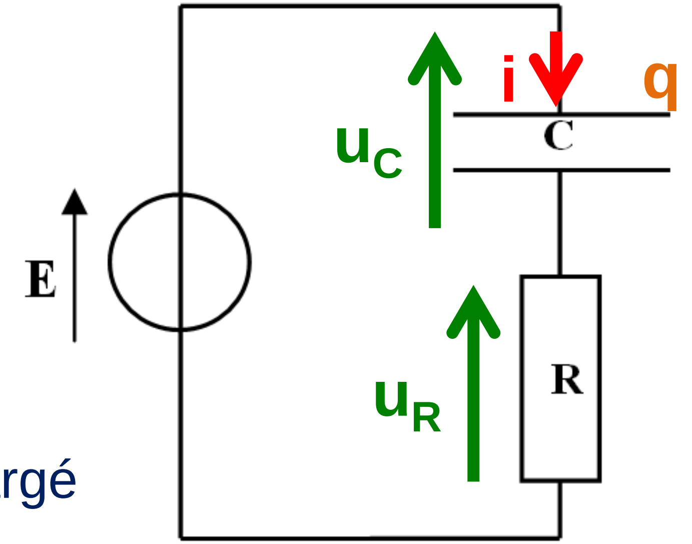




### a/ Présentation de la situation

➡ **Conditions initiales** : Avant de basculer l'interrupteur sur la position ❶, le condensateur est déchargé. **Que peut-on alors dire de la tension $u_C$ aux bornes du condensateur à t = 0** ?

# 1) CHARGE du condensateur

## a/ Présentation de la situation




➡ **Conditions initiales** : on suppose qu'avant de basculer l'interrupteur sur la position ❶, le condensateur est déchargé. **Que peut-on alors dire de la tension $u_C$ aux bornes du condensateur à t = 0** ?

Pour **t < 0 s**, on a **$u_C$ = 0 V** (condensateur déchargé donc **q = 0**)

Comme **$u_C$ est une fonction continue** du temps, on a aussi **$u_C(t = 0) = 0$ V**.

## b/ Equation différentielle vérifiée par $u_C$

☛ ***Loi des mailles*** : **$E - u_C - u_R = 0$**

☛ ***Loi d'Ohm associée au conducteur ohmique*** : En convention récepteur,

**$u_R = R \times i$**

☛ ***Expression de l'intensité du courant électrique traversant le condensateur*** :

En convention récepteur, **$i = C \times \dfrac{du_C}{dt}$**

☛ ***Réexpression de la loi des mailles*** :

$$E - u_C - R \times C \times \frac{du_C}{dt} = 0 \Leftrightarrow R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = E \Leftrightarrow \boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R \times C} = \frac{E}{R \times C}}$$

## b/ Equation différentielle vérifiée par $u_C$

- ***Loi des mailles*** : $E - u_C - u_R = 0$
- ***Loi d'Ohm associée au conducteur ohmique*** : En conventº récepteur, $u_R = R \times i$
- ***Expression de l'intensité du courant électrique traversant le condensateur*** :

En convention récepteur, $i = C \times \dfrac{du_C}{dt}$

- ***Réexpression de la loi des mailles*** :

$$E - u_C - R \times C \times \frac{du_C}{dt} = 0 \Leftrightarrow R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = E \Leftrightarrow \boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R \times C} = \frac{E}{R \times C}}$$

Equation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants

## c/ Résolution de l'équation différentielle vérifiée par $u_C$

- ***Solution particulière*** : On propose $u_{C1} = E$
- ***Solution de l'équation homogène*** :

**Mme MOREL**

**is back !!!**

Si l'équation homogène $(H)$ est : $\boxed{ay' + by = 0}$

*l'ensemble* $\mathcal{S}_H$ *des solutions de* $(H)$ *est :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{x \mapsto K e^{-\frac{b}{a}x}, K \in \mathbb{R}\right\}}$$

☛ ***Réexpression de la loi des mailles*** :

$$E - u_C - R \times C \times \frac{du_C}{dt} = 0 \Leftrightarrow R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = E \Leftrightarrow \boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R \times C} = \frac{E}{R \times C}}$$

Equation différentielle linéaire du 1$^{er}$ ordre à coefficients constants

## c/ Résolution de l'équation différentielle vérifiée par $u_C$

☛ ***Solution particulière*** : On propose $u_{C1} = E$

☛ ***Solution de l'équation homogène*** :

On propose $u_{C2} = K \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}$

Si l'équation homogène $(H)$ est : $\boxed{ay' + by = 0}$

*l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de $(H)$ est :*

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{x \mapsto Ke^{-\frac{b}{a}x}, K \in \mathbb{R}\right\}}$$

**Bye Bye**

**Mme MOREL !!!**

☛ ***Solution de l'équation différentielle*** :

$$u_C = u_{C1} + u_{C2}$$

Soit $\boxed{u_C = E + K \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}}$

☛ ***Utilisation de la condition initiale pour trouver la valeur de la constante K*** :

**A la date t = 0**, la tension $u_C$ aux bornes du condensateur vaut **0 V**

☛ ***Solution générale de l'équation différentielle*** :

$$u_C = u_{C1} + u_{C2}$$

Soit $\boxed{u_C = E + K \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}}$

☛ ***Utilisation de la condition initiale pour trouver la valeur de la constante K*** :

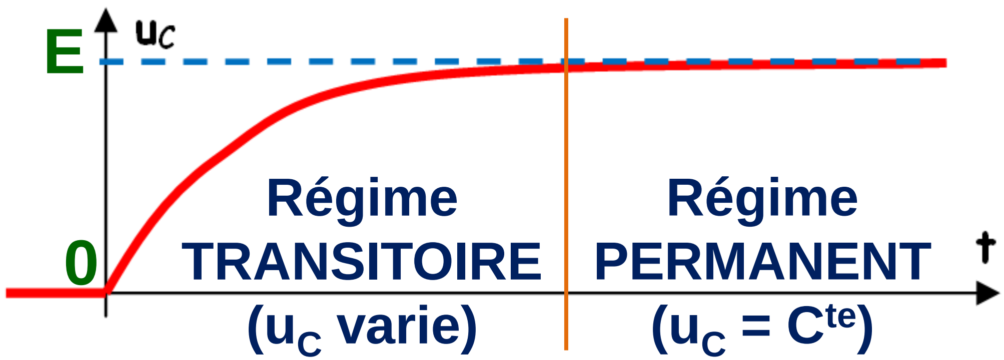
**A la date t = 0**, la tension $u_C$ aux bornes du condensateur vaut **0 V**

Or, à cette date, $0 = E + K \times e^{-\frac{1}{RC} \times 0}$ ⇔ $0 = E + K$ ⇔ $\boxed{K = -E}$

☛ ***Evolution de la tension $u_C$ aux bornes du condensateur au cours de la charge*** :

$$\boxed{u_C = E \times \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} \times t}\right)}$$

On note que $\lim_{t \to +\infty} (u_C) = E$




## d/ L'intensité i du courant électrique

☛ ***Expression de i en fonction du temps*** :

On peut se servir de la relation $i = C \times \frac{du_C}{dt}$ ou alors plus simplement : $i = \frac{u_R}{R}$

## d/ L'intensité i du courant électrique

☛ ***Expression de i en fonction du temps*** :

On peut se servir de la relation $\mathbf{i = C \times \dfrac{du_C}{dt}}$ ou alors plus simplement : $\mathbf{i = \dfrac{u_R}{R}}$

Or, $u_R = E - u_C = \cancel{E} - E \times (\cancel{1} - e^{-\frac{1}{RC} \times t})$ ⇔ $\boxed{i = \dfrac{E}{R} \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}}$

☛ ***Evolution de l'intensité du courant électrique* i *au cours de la charge*** :

• <u>A t = 0</u>, on a $\mathbf{i = \dfrac{E}{R} > 0}$

(**<u>discontinuité de i à l'origine</u>** car pour t < 0, i = 0)


• On note que $\mathbf{\lim\limits_{t \to +\infty} (i) = 0}$ ➡ En régime permanent, le condensateur est équivalent à un **<u>interrupteur ouvert</u>**

## e/ Temps caractéristique de la charge

☛ ***Expression*** : Le temps caractéristique $\tau$ du circuit (ou **constante de temps** du circuit) est égal au produit **R × C**. Il est homogène à une durée et s'exprime en seconde.

**en Ohm (Ω)** **en Farad (F)**

☛ ***Evolution de l'intensité du courant électrique* i *au cours de la charge*** :

• A $t = 0$, on a $\mathbf{i = \frac{E}{R} > 0}$

(**discontinuité de i à l'origine** car pour $t < 0$, $i = 0$)

• On note que $\lim\limits_{t \to +\infty} (i) = 0$


➡ En régime permanent, le condensateur est équivalent à un **interrupteur ouvert**

## e/ Temps caractéristique de la charge

☛ ***Expression*** : Le temps caractéristique $\tau$ du circuit (ou **constante de temps** du circuit) est égal au produit **R × C**. Il est homogène à une durée et s'exprime en seconde.

**R** en Ohm ($\Omega$) ; **C** en Farad (F)

✍ ***Application 4*** : *Par une analyse dimensionnelle, vérifier que le produit* R×C *est homogène à une durée.*

$$[R \times C] = \frac{\cancel{[U]}}{[I]} \times \frac{[Q]}{\cancel{[U]}} = \frac{[Q]}{[I]} = [\text{temps}]$$

☛ ***Interprétation*** : On estime que le **régime permanent est atteint** au bout d'une durée égale à $5 \times \tau$.

## e/ Temps caractéristique de la charge

☛ ***Expression*** : Le temps caractéristique $\tau$ du circuit (ou constante de temps du circuit) est égal au produit $\mathbf{R \times C}$. Il est homogène à une durée et s'exprime en seconde.

**en Ohm (Ω)** **en Farad (F)**

✍ ***Application 4*** : *Par une analyse dimensionnelle, vérifier que le produit* R×C *est homogène à une durée.*

$$[R \times C] = \frac{\cancel{[U]}}{[I]} \times \frac{[Q]}{\cancel{[U]}} = \frac{[Q]}{[I]} = [\text{temps}]$$

☛ ***Interprétation*** : On estime que le **régime permanent est atteint** au bout d'une durée égale à $5 \times \tau$.

✍ ***Application 5*** : *A l'aide de l'expression de* $\mathbf{u_C}$ *établie au* **II-1.b)**, *vérifier l'affirmation précédente.*

$$u_C = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Donc pour $t = 5\,\tau$, $u_C(5\tau) = E \times \left(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}\right)$

Soit $u_C(5\tau) = E \times \left(1 - e^{-5}\right)$ Soit $u_C(5\tau) = 0{,}993\ E$

**Condensateur chargé à 99,3 %**

✍ ***Application 5*** *: A l'aide de l'expression de* $\mathbf{u_C}$ *établie au* **II-1.b)**, *vérifier l'affirmation précédente.*

$$u_C = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$ Donc pour **t = 5 τ**, $$u_C(5\tau) = E \times \left(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}}\right)$$

Soit $u_C(5\tau) = E \times (1 - e^{-5})$ Soit $\underline{u_C(5\tau) = 0,993\ E}$

**Condensateur chargé à <u>99,3 %</u>**

☛ ***Détermination graphique*** :

**METHODE 1 : méthode de la charge à 63 %**

Abscisse du graphique $\mathbf{u_C = f(t)}$ pour laquelle $\underline{\mathbf{u_C = 0,63 \times E}}$.

**METHODE 2 : méthode de la tangente à l'origine**

Abscisse du point de croisement de l'**<u>asymptote horizontale</u>** du graphique $\mathbf{u_C = f(t)}$ et de la **<u>tangente à l'origine</u>**

✍ ***Application 6***: *Déterminer la constante de temps* **τ** *du circuit dont l'évolution de la tension* $\mathbf{u_C}$ *aux bornes du condensateur est représentée sur le graphique ci-contre.*

✍ ***Application 5*** : *A l'aide de l'expression de* $\mathbf{u_C}$, *vérifier l'affirmation précédente.*

$$u_C = E \times (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$ Donc pour **t = 5 τ**, $u_C(5\tau) = E \times (1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}})$

Soit $u_C(5\tau) = E \times (1 - e^{-5})$ Soit $\underline{u_C(5\tau) = 0{,}993\ E}$

**Condensateur chargé à <u>99,3 %</u>**

✍ ***Application 6***: *Déterminer la constante de temps* **τ** *du circuit dont l'évolution de la tension* $\mathbf{u_C}$ *aux bornes du condensateur est représentée sur le graphique ci-contre.*

- **<u>Méthode 1</u>** : **E = 5 V**.

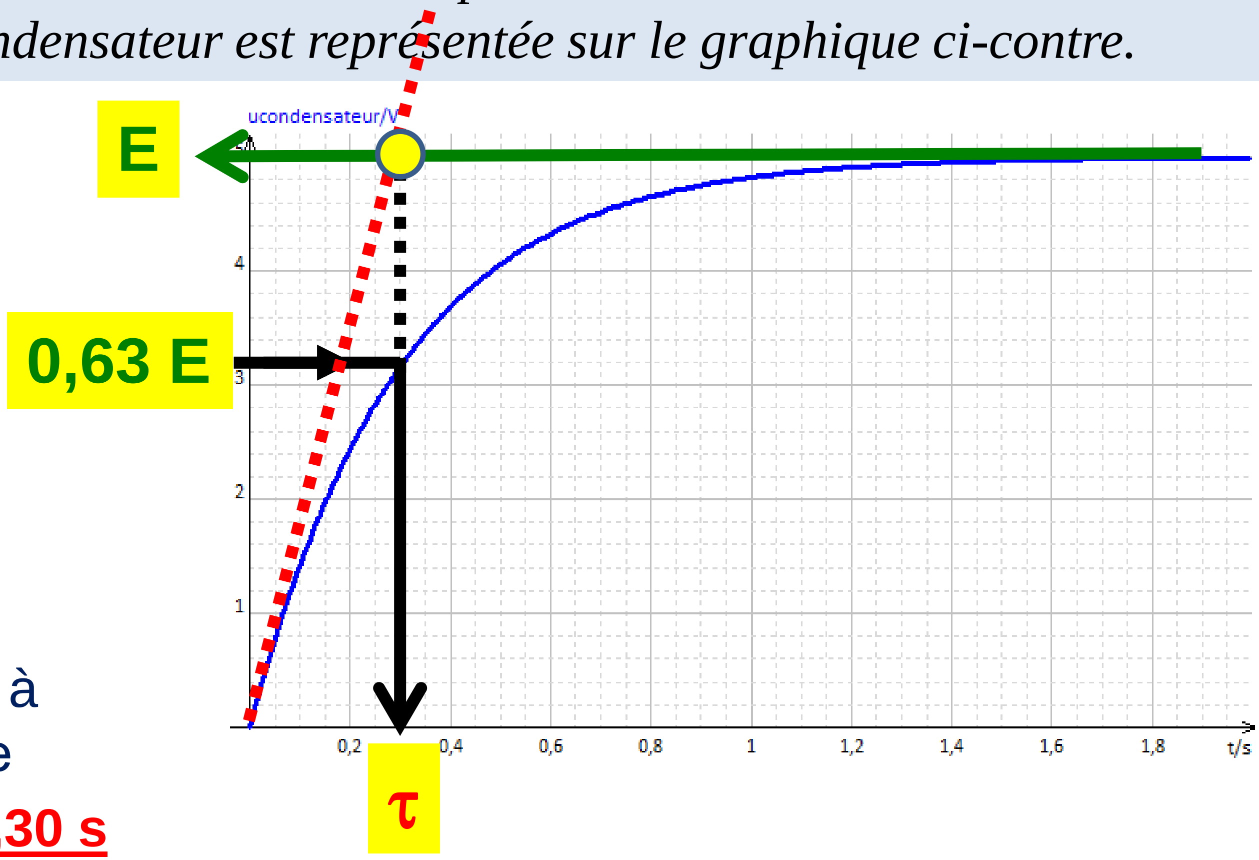
On lit l'abscisse du graphique $u_C = f(t)$ pour laquelle : $u_C = 0{,}63 \times E$

$u_C = 0{,}63 \times 5$

$u_C = 3{,}15$ V.

On obtient $\underline{\tau \approx 0{,}30\ s}$

- **<u>Méthode 2</u>** : la tangente à l'origine coupe l'asymptote horizontale pour **t =** $\underline{\tau \approx 0{,}30\ s}$



• **Méthode 1** : **E = 5 V**.

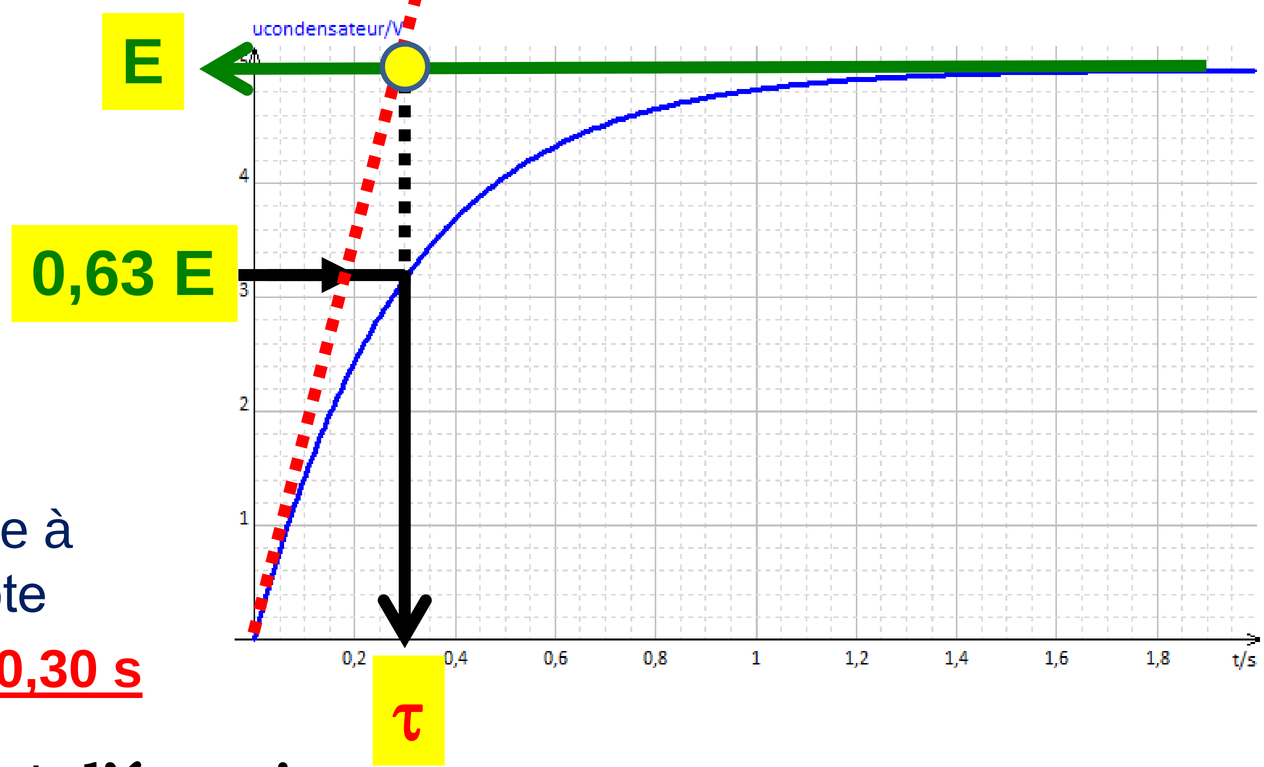
On lit l'abscisse du graphique $u_C = f(t)$ pour laquelle : $u_C = 0{,}63 \times E$

$u_C = 0{,}63 \times 5$

$u_C = 3{,}15$ **V**.

On obtient **$\tau \approx 0{,}30$ s**

• **Méthode 2** : la tangente à l'origine coupe l'asymptote horizontale pour **t** = **$\tau \approx 0{,}30$ s**




## f/ Bilan de puissance et d'énergie

Reprenons l'équation obtenue en appliquant la loi des mailles au **II-1.b)** et ***multiplions-la par « i »***. On obtient le **bilan de puissance** suivant :

$$E - u_C - u_R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E \times i - u_C \times i - u_R \times i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{E \times i = u_C \times i + u_R \times i}$$

avec **$E$, $u_C$, $u_R$** et **$i > 0$**

- La puissance du générateur (**$E \times i$**) est positive en convention générateur : **il fournit de l'énergie au reste du circuit**.

- La puissance du condensateur (**$u_C \times i$**) et celle du conducteur ohmique (**$u_R \times i$**). sont positives en convention récepteur : **ils reçoivent réellement de l'énergie**.

## f/ Bilan de puissance et d'énergie

$E - u_C - u_R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E \times i - u_C \times i - u_R \times i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{E \times i = u_C \times i + u_R \times i}$

avec $E$, $u_C$, $u_R$ et $i > 0$

- La puissance du générateur (**$E \times i$**) est positive en convention générateur : **il fournit de l'énergie au reste du circuit**.

- La puissance du condensateur (**$u_C \times i$**) et celle du conducteur ohmique (**$u_R \times i$**). sont positives en convention récepteur : **ils reçoivent réellement de l'énergie**.

Si on multiplie le bilan de puissance précédent par une **petite durée dt** (durée élémentaire), on obtient le **bilan d'énergie** :

$$\boxed{E \times i \times dt = u_C \times i \times dt + u_R \times i \times dt}$$

- **Energie algébriquement FOURNIE par le générateur** :

$$\int_0^{\infty} E \times i \times dt = \int_0^{\infty} E \times \frac{E}{R} \times e^{-\frac{t}{RC}} \times dt = \frac{E^2}{R} \times \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{RC}} \times dt$$

$$= \frac{E^2}{R} \times \left[ -RC\, e^{-\frac{t}{RC}} \right]_0^{\infty} = \frac{E^2}{R} \times [0 - (-RC)] \qquad \boxed{E_{\text{générateur}} = CE^2}$$

**> 0** en convention générateur : le générateur ***cède*** de l'énergie au reste du circuit

Si on multiplie le bilan de puissance précédent par une **petite durée dt** (durée élémentaire), on obtient le **bilan d'énergie** :

$$\boxed{E \times i \times dt = u_C \times i \times dt + u_R \times i \times dt}$$

- **Energie algébriquement FOURNIE par le générateur** :

$$\boxed{E_{\text{générateur}} = CE^2}$$

**> 0** en convention générateur : le générateur ***cède*** cette l'énergie au reste du circuit

- **Energie algébriquement RECUE par le condensateur** :

$$\int_0^{\infty} u_C \times i \times dt = \int_0^{\infty} E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \times \frac{E}{R} \times e^{-\frac{t}{RC}} \times dt$$

$$= \frac{E^2}{R} \times \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{2t}{RC}}\right) \times dt$$

**> 0** en convention récepteur : le condensateur ***reçoit*** cette énergie

$$= \frac{E^2}{R} \times \left[-RC\, e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^{\infty}$$

$$\boxed{E_{\text{condensateur}} = \frac{CE^2}{2}}$$

$$= \frac{E^2}{R} \times \left[-RC \times 0 + \frac{RC}{2} \times 0 - \left(-RC + \frac{RC}{2}\right)\right]$$

On obtient le **bilan d'énergie** : $\boxed{E\times i\times dt = u_C\times i\times dt + u_R\times i\times dt}$

- **Energie algébriquement FOURNIE par le générateur** :

$$\boxed{E_{générateur} = CE^2}$$

**> 0** en convention générateur : le générateur ***cède*** cette énergie au reste du circuit

- **Energie algébriquement RECUE par le condensateur** :

$$\boxed{E_{condensateur} = \frac{CE^2}{2}}$$

**> 0** en convention récepteur : le condensateur ***reçoit*** cette énergie

- **Energie algébriquement RECUE par le conducteur ohmique** :

$$\int_0^{\infty} u_R \times i \times dt = \int_0^{\infty} R \times i^2 \times dt = \int_0^{\infty} R \times \frac{E^2}{R^2} \times e^{-\frac{2\,t}{RC}} \times dt$$

$$= \frac{E^2}{R} \times \int_0^{\infty} e^{-\frac{2\,t}{RC}} \times dt = \frac{E^2}{R} \times \left[-\frac{RC}{2} e^{-\frac{2\,t}{RC}}\right]_0^{\infty} = \frac{E^2}{R} \times \left[\frac{RC}{2}\right]$$

$$= \frac{E^2}{R} \times \left[-\frac{RC}{2} \times 0 - \left(-\frac{RC}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{E_{conducteur\ ohmique} = \frac{CE^2}{2}}$$

**> 0** en convention récepteur : le conducteur ohmique ***reçoit*** cette énergie

Si on multiplie le bilan de puissance précédent par une **petite durée dt** (durée élémentaire), on obtient le **bilan d'énergie** :

$$\boxed{E \times i \times dt = u_C \times i \times dt + u_R \times i \times dt}$$

- **Energie algébriquement FOURNIE par le générateur** :

$$\boxed{E_{\text{générateur}} = CE^2}$$

**> 0** en convention générateur : le générateur ***cède*** cette l'énergie au reste du circuit

- **Energie algébriquement RECUE par le condensateur** :

$$\boxed{E_{\text{condensateur}} = \frac{CE^2}{2}}$$

**> 0** en convention récepteur : le condensateur ***reçoit*** cette énergie

- **Energie algébriquement RECUE par le conducteur ohmique** :

$$\boxed{E_{\text{conducteur ohmique}} = \frac{CE^2}{2}}$$

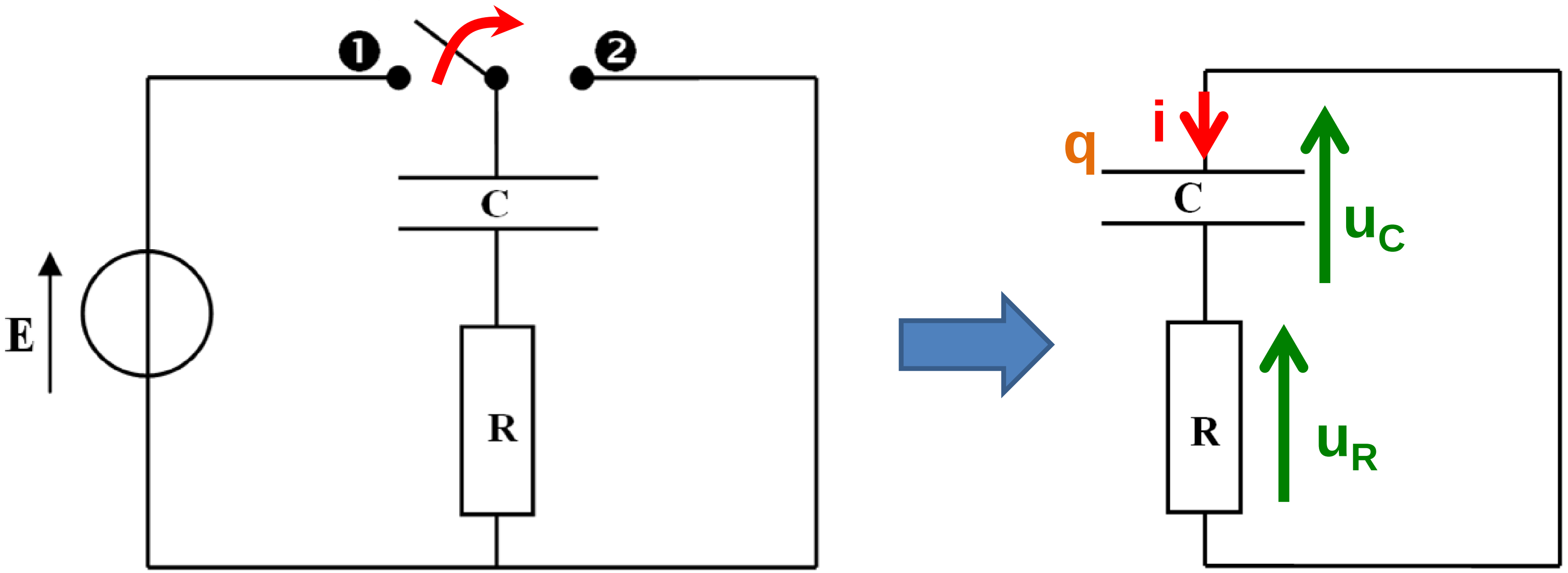
**> 0** en convention récepteur : le conducteur ohmique ***reçoit*** cette énergie

**Seulement la moitié de l'énergie fournie par la source de tension est stockée dans le condensateur**, l'autre moitié étant fournie au conducteur ohmique.

$$E_{générateur} = CE^2 \qquad E_{condensateur} = \frac{CE^2}{2} \qquad E_{conducteur\ ohmique} = \frac{CE^2}{2}$$

**Seulement la moitié de l'énergie fournie par la source de tension est stockée dans le condensateur**, l'autre moitié étant fournie au conducteur ohmique.

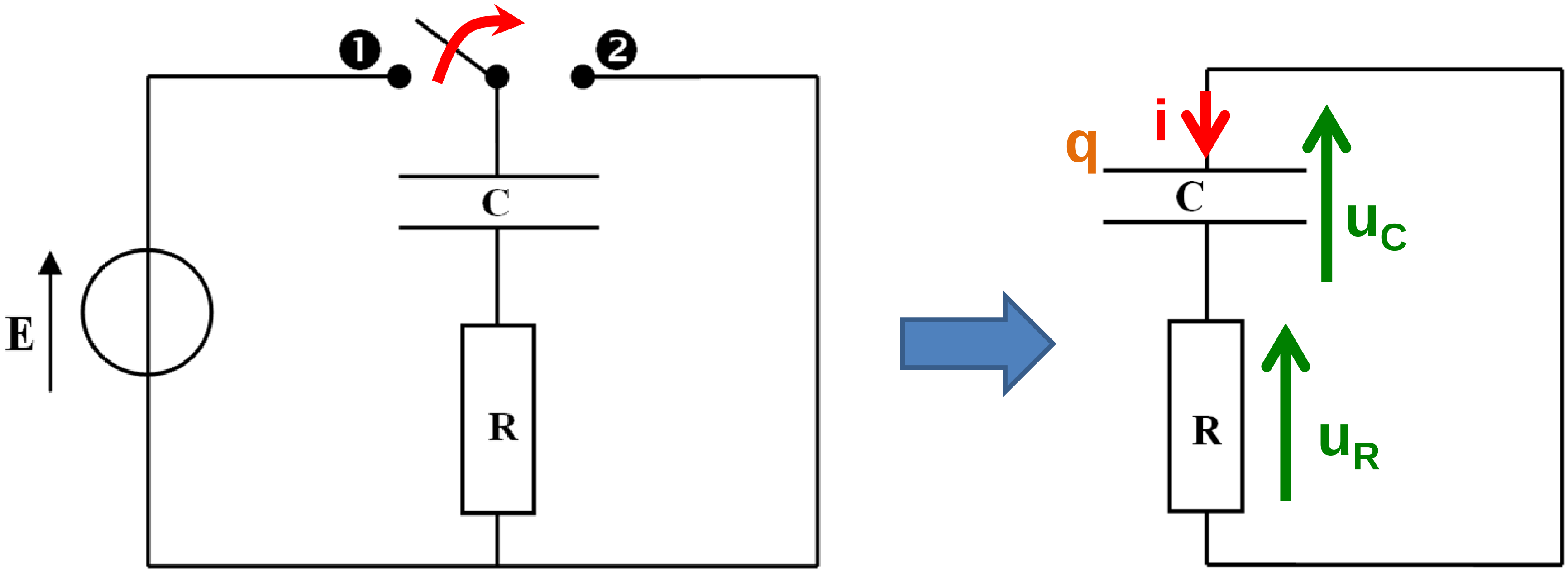
## 2) DECHARGE du condensateur




### a/ Présentation de la situation

➡ **Conditions initiales** : on suppose qu'avant de basculer l'interrupteur sur la position ❷, le condensateur était chargé. **Que peut-on dire de la tension $u_C$ aux bornes du condensateur à t = 0** ?

# 2) DECHARGE du condensateur




## a/ Présentation de la situation

➡ **Conditions initiales** : on suppose qu'avant de basculer l'interrupteur sur la position ❷, le condensateur était chargé. **Que peut-on dire de la tension $u_C$ aux bornes du condensateur à t = 0** ?

Pour **t < 0 s**, on a **$u_C = E$** (condensateur chargé, régime permanent atteint)

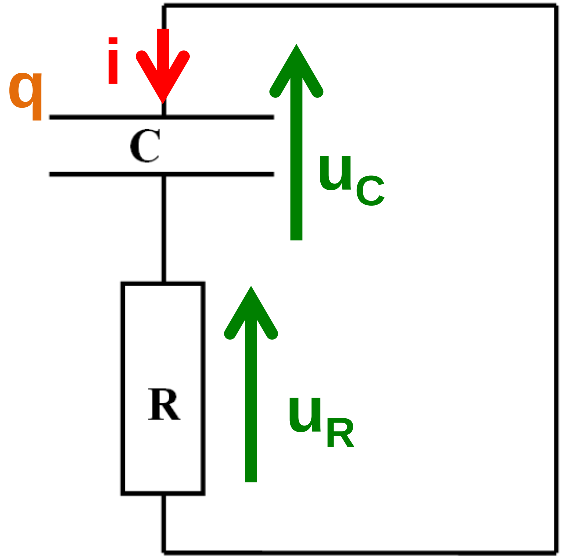
Comme **$u_C$ est une fonction continue du temps**, on a aussi **$u_C (t = 0) = E$**.

## b/ Equation différentielle vérifiée par $u_C$

☛ ***Loi des mailles*** : $u_R + u_C = 0$

## 2) DECHARGE du condensateur

### a/ Présentation de la situation




➡ **Conditions initiales** : on suppose qu'avant de basculer l'interrupteur sur la position ❷, le condensateur était chargé. **Que peut-on dire de la tension $u_C$ aux bornes du condensateur à t = 0** ?

Pour **t < 0 s**, on a **$u_C = E$** (condensateur chargé, régime permanent atteint)

Comme **$u_C$ est une fonction continue du temps**, on a aussi **$u_C(t = 0) = E$**.

### b/ Equation différentielle vérifiée par $u_C$

☛ ***Loi des mailles*** : $u_R + u_C = 0$

☛ ***Loi d'Ohm associée au conducteur ohmique*** : En convention récepteur,

$$u_R = R \times i$$

☛ ***Expression de l'intensité du courant électrique traversant le condensateur*** :

En convention récepteur, $i = C \times \dfrac{du_C}{dt}$

☛ ***Réexpression de la loi des mailles*** :

$$R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R \times C} = 0}$$

Equation différentielle linéaire du 1$^{er}$ ordre sans 2$^{nd}$ membre

## b/ Equation différentielle vérifiée par $u_C$

- ***Loi des mailles*** : $u_R + u_C = 0$
- ***Loi d'Ohm associée au conducteur ohmique*** : En convent° récepteur, $u_R = R \times i$
- ***Expression de l'intensité du courant électrique traversant le condensateur*** :

En convention récepteur, $i = C \times \dfrac{du_C}{dt}$

- ***Réexpression de la loi des mailles*** :

$$R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R \times C} = 0}$$

Equation différentielle linéaire du 1er ordre sans 2nd membre

## c/ Résolution de l'équation différentielle vérifiée par $u_C$

- ***Solution générale de l'équation différentielle*** :

**Mme MOREL**
**is back again !!!**

Si l'équation homogène $(H)$ est : $\boxed{ay' + by = 0}$

*l'ensemble $S_H$ des solutions de $(H)$ est :*

$$\boxed{S_H = \left\{x \mapsto Ke^{-\frac{b}{a}x}, K \in \mathbb{R}\right\}}$$

On propose $u_{C2} = K \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}$

☛ ***Réexpression de la loi des mailles*** :

$$R \times C \times \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R \times C} = 0}$$

Equation différentielle linéaire du 1er ordre sans 2nd membre

## c/ Résolution de l'équation différentielle vérifiée par $u_C$

☛ ***Solution de l'équation différentielle*** :

On propose $u_{C2} = K \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}$

*Si l'équation homogène $(H)$ est : $\boxed{ay' + by = 0}$*

*l'ensemble $S_H$ des solutions de $(H)$ est :*

$$\boxed{S_H = \left\{x \mapsto Ke^{-\frac{b}{a}x}, K \in \mathbb{R}\right\}}$$

☛ ***Utilisation de la condition initiale pour trouver la valeur de la constante K*** :

**A la date t = 0**, la tension $u_C$ aux bornes du condensateur vaut **E**

Or, à cette date, $E = K \times e^{-\frac{1}{RC} \times 0} \Leftrightarrow \boxed{K = E}$

☛ ***Evolution de la tension $u_C$ aux bornes du condensateur au cours de la décharge*** :

$$\boxed{u_C = E \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}}$$

On note que $\lim\limits_{t \to +\infty} (u_C) = 0$

☛ ***Solution générale de l'équation homogène*** :

On propose $u_{C2} = K \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}$

☛ ***Utilisation de la condition initiale pour trouver la valeur de la constante K*** :

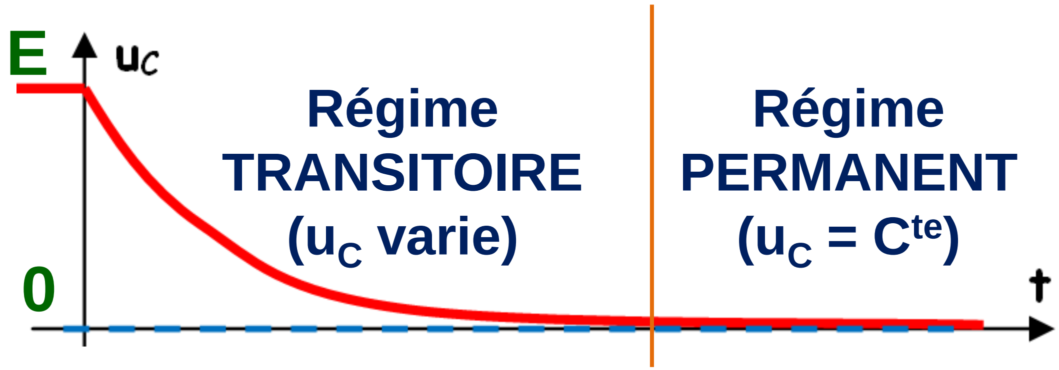
**A la date t = 0**, la tension $u_C$ aux bornes du condensateur vaut **E**

Or, à cette date, $E = K \times e^{-\frac{1}{RC} \times 0}$ ⬄ $\boxed{K = E}$

☛ ***Evolution de la tension $u_C$ aux bornes du condensateur au cours de la décharge*** :

$$\boxed{u_C = E \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}}$$

On note que $\lim\limits_{t \to +\infty} (u_C) = 0$




## d/ L'intensité i du courant électrique

☛ ***Expression de i en fonction du temps*** :

On peut se servir de la relation $i = C \times \frac{du_C}{dt}$ ou alors plus simplement : $i = \frac{u_R}{R}$

☛ ***Evolution de la tension $u_C$ aux bornes du condensateur au cours de la décharge*** :

$$\boxed{u_C = E \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}}$$

On note que $\lim\limits_{t \to +\infty} (u_C) = 0$


## d/ L'intensité i du courant électrique

☛ ***Expression de i en fonction du temps*** :

On peut se servir de la relation $i = C \times \frac{du_C}{dt}$ ou alors plus simplement : $i = \frac{u_R}{R}$

Or, $u_R + u_C = 0$ Donc $i = \frac{-u_C}{R}$

$$\boxed{i = \frac{-E}{R} \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}}$$

☛ ***Evolution de l'intensité du courant électrique* i *au cours de la décharge*** :

- A t = 0, on a $i = \frac{-E}{R} < 0$

(**discontinuité de i à l'origine** car pour t < 0, i = 0)

- On note que $\lim\limits_{t \to +\infty} (i) = 0$

➡ En régime permanent, le condensateur est équivalent à un **interrupteur ouvert**

## d/ L'intensité i du courant électrique

☛ ***Expression de i en fonction du temps*** :

On peut se servir de la relation $\mathbf{i = C \times \frac{du_C}{dt}}$ ou alors plus simplement : $\mathbf{i = \frac{u_R}{R}}$

Or, $\mathbf{u_R + u_C = 0}$ Donc $\mathbf{i = \frac{-u_C}{R}}$

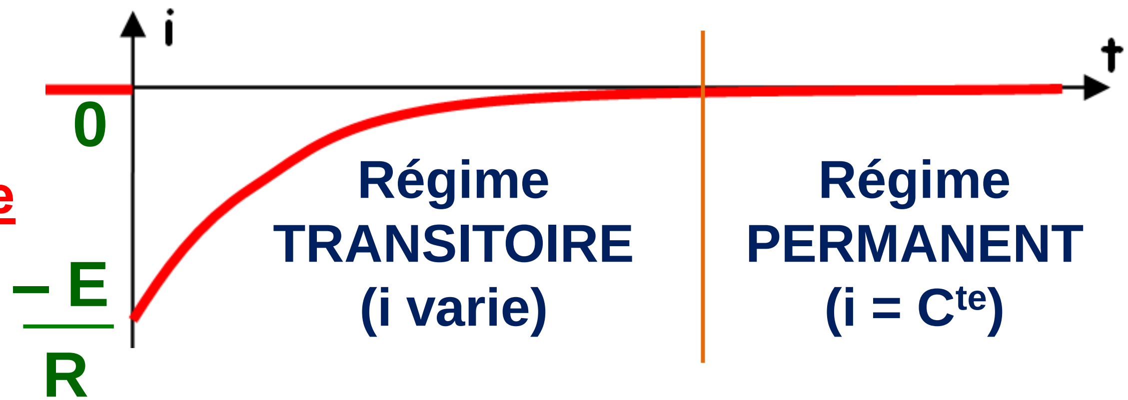
$$\boxed{\mathbf{i = \frac{-E}{R} \times e^{-\frac{1}{RC} \times t}}}$$

☛ ***Evolution de l'intensité du courant électrique* i *au cours de la décharge*** :

- A t = 0, on a $\mathbf{i = \frac{-E}{R} < 0}$

(**discontinuité de i à l'origine** car pour t < 0, i = 0)

- On note que $\mathbf{\lim_{t \to +\infty} (i) = 0}$




➡ En régime permanent, le condensateur est équivalent à un **interrupteur ouvert**

## e/ Temps caractéristique de la décharge

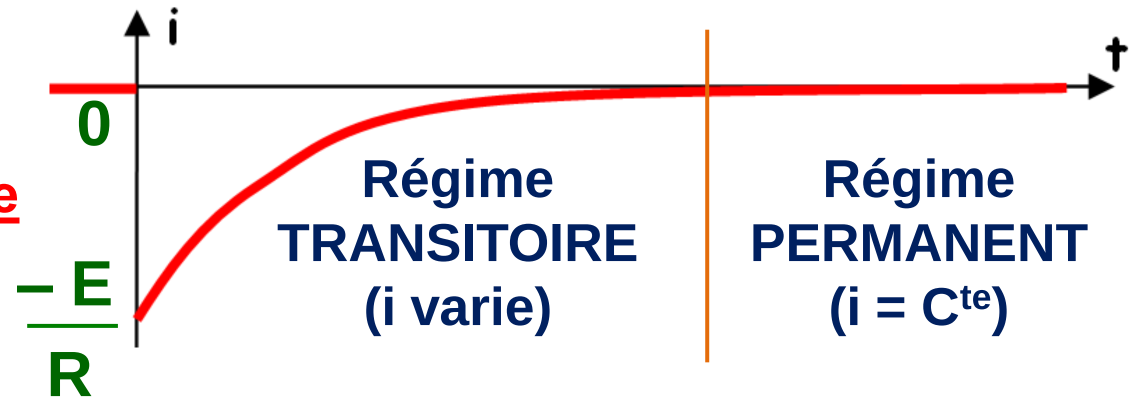
☛ ***Expression*** : Le temps caractéristique $\tau$ de décharge du circuit est ***le même que le temps caractéristique de charge***, soit $\mathbf{\tau = R \times C}$.

☛ ***Evolution de l'intensité du courant électrique* i *au cours de la décharge*** :

- <u>A t = 0</u>, on a **i** $= \dfrac{-E}{R} < 0$

(**discontinuité de i à l'origine** car pour t < 0, i = 0)

- On note que $\lim\limits_{t \to +\infty} (i) = 0$




➡ En régime permanent, le condensateur est équivalent à un **<u>interrupteur ouvert</u>**

## e/ Temps caractéristique de la décharge

☛ ***Expression*** : Le temps caractéristique $\tau$ de décharge du circuit est ***le même que le temps caractéristique de charge***, soit $\tau = R \times C$.

☛ ***Interprétation*** : Lors de la décharge comme lors de la charge, on estime que le **<u>régime permanent est atteint</u>** au bout d'une durée égale à $5 \times \tau$.

✍ ***Application 7*** : *A l'aide de l'expression de* $u_C$ *établie au* **II-2.b)**, *vérifier l'affirmation précédente.*

$u_C = E \times e^{-\frac{t}{\tau}}$ Donc pour $t = 5\,\tau$, $u_C(5\tau) = E \times e^{-\frac{5\tau}{\tau}} = E \times e^{-5}$

## e/ Temps caractéristique de la décharge

☛ **Expression** : Le temps caractéristique $\tau$ de décharge du circuit est ***le même que le temps caractéristique de charge***, soit $\tau = R \times C$.

☛ **Interprétation** : Lors de la décharge comme lors de la charge, on estime que le **régime permanent est atteint** au bout d'une durée égale à $5 \times \tau$.

✍ ***Application 7*** : *A l'aide de l'expression de* $u_C$ *établie au* **II-2.b)**, *vérifier l'affirmation précédente.*

$u_C = E \times e^{-\frac{t}{\tau}}$ Donc pour $t = 5\,\tau$, $u_C(5\tau) = E \times e^{-\frac{5\tau}{\tau}} = E \times e^{-5}$

Soit $u_C(5\tau) = 0{,}007\ E$ **Condensateur déchargé à 99,3 %**

☛ ***Détermination graphique*** :

**METHODE 1 : méthode de la décharge à 63 %**

Abscisse du graphique $u_C = f(t)$ pour laquelle $u_C = 0{,}37 \times E$.

**METHODE 2 : méthode de la tangente à l'origine**

Abscisse du point de croisement de l'**asymptote horizontale** du graphique $u_C = f(t)$ et de la **tangente à l'origine**

✍ ***Application 7*** : *A l'aide de l'expression de* $\mathbf{u_C}$ *établie au* **II-2.b)**, *vérifier l'affirmation précédente.*

$$u_C = E \times e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Donc pour $\mathbf{t = 5\,\tau}$, $\mathbf{u_C(5\tau) = E \times e^{-\frac{5\tau}{\tau}}} \quad \mathbf{E \times e^{-5}}$

Soit $u_C(5\tau) = 0{,}007\ E$ **Condensateur déchargé à 99,3 %**

✍ ***Application 8*** : *Déterminer la constante de temps* **τ** *du circuit dont l'évolution de la tension* $\mathbf{u_C}$ *aux bornes du condensateur est représentée sur le graphique ci-contre.*

- **Méthode 1** : **E = 5 V**.

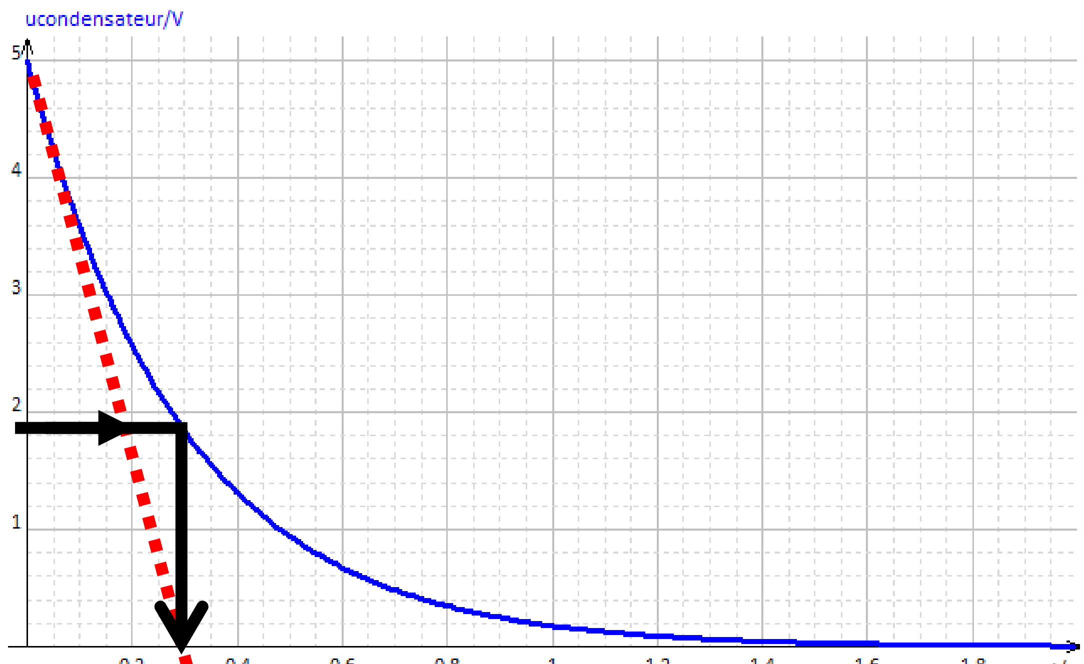
On lit l'abscisse du graphique $\mathbf{u_C = f(t)}$ pour laquelle : $\mathbf{u_C = 0{,}37 \times E}$

$\mathbf{u_C = 0{,}37 \times 5}$

$\mathbf{u_C = 1{,}85\ V}$.

**0,37 E**

On obtient **τ ≈ 0,30 s**




**τ**

- **Méthode 2** : la tangente à l'origine coupe l'asymptote horizontale pour **t = τ ≈ 0,30 s**

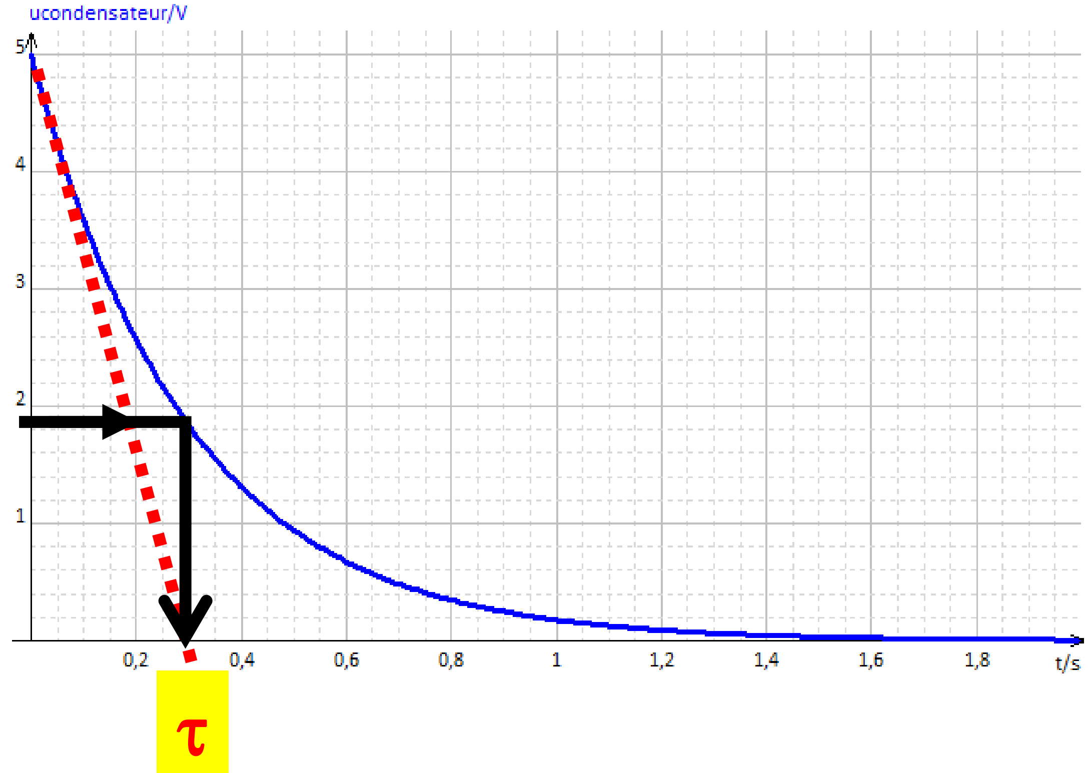
• **<u>Méthode 1</u>** : **E = 5 V**.

On lit l'abscisse du graphique **$u_C$ = f(t)** pour laquelle :

**$u_C = 0{,}37 \times E \;\; = 0{,}37 \times 5$**

**$u_C$ = 1,85 V**.

On obtient **<u>τ ≈ 0,30 s</u>**




• **<u>Méthode 2</u>** : la tangente à l'origine coupe l'asymptote horizontale pour **t** = **<u>τ ≈ 0,30 s</u>**

## f/ <u>Bilan de puissance et d'énergie</u>

Reprenons l'équation obtenue en appliquant la loi des mailles au **II-2.b)** et ***multiplions-la par « i »***. On obtient le **<u>bilan de puissance</u>** suivant :

**$u_C + u_R = 0$** ⇔ **$u_C \times i \; + \; u_R \times i \; = \; 0$** avec **$u_C > 0$** mais **i** et **$u_R < 0$**

- La puissance du condensateur (**$u_C \times i$**) est <u>négative en convention récepteur</u> : **il se comporte comme un générateur en cédant l'énergie qu'il a stockée**.

- La puissance du conducteur ohmique est <u>positive</u> (**$u_R \times i$**) <u>en convention récepteur</u> : **il reçoit effectivement l'énergie cédée par le condensateur**

## f/ Bilan de puissance et d'énergie

Reprenons l'équation obtenue en appliquant la loi des mailles au **II-2.b)** et ***multiplions-la par « i »***. On obtient le **bilan de puissance** suivant :

$u_C + u_R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_C \times i + u_R \times i = 0$ avec $u_C > 0$ mais $i$ et $u_R < 0$

- La puissance du condensateur ($u_C \times i$) est négative en convention récepteur : **il se comporte comme un générateur en cédant l'énergie qu'il a stockée**.

- La puissance du conducteur ohmique est positive ($u_R \times i$) en convention récepteur : **il reçoit effectivement l'énergie cédée par le condensateur**

Si on multiplie le bilan de puissance précédent par une **petite durée dt** (durée élémentaire), on obtient le **bilan d'énergie** :

$$0 = u_C \times i \times dt + u_R \times i \times dt$$

- Energie reçue algébriquement par le condensateur entre t = 0 et t → + ∞ :

$$\int_0^{\infty} u_C \times i \times dt = \int_0^{\infty} E \times e^{-\frac{t}{RC}} \times \left(\frac{-E}{R} \times e^{-\frac{t}{RC}}\right) \times dt = \frac{-E^2}{R} \times \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} \times dt$$

$$= \frac{-E^2}{R} \times \left[-\frac{RC}{2}\, e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^{\infty} = \frac{-E^2}{R} \times \left[-\frac{RC}{2} \times 0 - \left(-\frac{RC}{2} \times 1\right)\right]$$

- **Energie reçue algébriquement par le condensateur entre t = 0 et t → + ∞ :**

$$\int_0^{\infty} u_C \times i \times dt = \int_0^{\infty} E \times e^{-\frac{t}{RC}} \times \left(\frac{-E}{R} \times e^{-\frac{t}{RC}}\right) \times dt = \frac{-E^2}{R} \times \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} \times dt$$

$$= \frac{-E^2}{R} \times \left[-\frac{RC}{2}\, e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^{\infty} = \frac{-E^2}{R} \times \left[-\frac{RC}{2} \times 0 - \left(-\frac{RC}{2} \times 1\right)\right]$$

< 0 en convention récepteur : le condensateur ***cède*** cette énergie au conducteur ohmique

$$\boxed{E_{condensateur} = -\frac{CE^2}{2}}$$

- **Energie reçue algébriquement par le conducteur ohmique entre t = 0 et t → + ∞ :**

$$\int_0^{\infty} u_R \times i \times dt = \int_0^{\infty} R \times i^2 \times dt = \int_0^{\infty} R \times \frac{E^2}{R^2} \times e^{-\frac{2t}{RC}} \times dt$$

$$= \frac{E^2}{R} \times \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} \times dt$$ = opposé de la relation précédente

> 0 en convention récepteur : le conducteur ohmique ***reçoit*** cette énergie

$$\boxed{E_{conducteur\ ohmique} = \frac{CE^2}{2}}$$

Le conducteur ohmique **reçoit** la totalité de l'énergie **cédée** par le condensateur