Concours blanc 2024

MATHÉMATIQUES

(3 heures)

L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5 .

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet est formé de trois exercices totalement indépendants.

Un rappel de certaines fonctions Python est donné en annexe.

Pour les questions d'informatique, une attention particulière sera portée à la lisibilité, la simplicité et l'efficacité du code proposé.

On pourra admettre le résultat d'une question pour répondre à une question postérieure à condition de le mentionner explicitement.

Exercice 1 : Étude d'une suite.

On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5\,u_n - 8\,n + 6\,.$$

1) Calculer u_1 et u_2.
2) Soit n un entier naturel.
   a) Recopier et compléter la fonction `suite_u` d'argument n ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie la valeur de u_n.

```python
def suite_u(n):
    u = ...
    for i in range(1, n+1):
        u = ...
    return u
```

   b) Evaluer le nombre d'opérations effectués par la fonction `suite_u` en fonction de n. On notera $c(n)$ ce nombre.
   c) Ecrire un programme Python permettant de tracer les points de coordonnées (n, u_n) pour n entre 0 et 100.
3) a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2n$.
   b) En déduire la limite de la suite (u_n).
   c) i. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel n vérifiant, $n \geqslant n_0$, on a : $u_n \geqslant 10^p$?
      ii. Ecrire une fonction Python qui prend pour argument un entier p et qui renvoie le premier n pour lequel $u_n \geqslant 10^p$.
4) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

5) On note (S_n) la suite définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Ecrire une fonction naïve `suite_S` en Python qui renvoie la valeur de S_n en utilisant la fonction `suite_u`.

b) Evaluer le nombre d'opérations effectués par la fonction `suite_S` en fonction de n.

(On rappelle que chaque appel à la fonction `suite_u` compte pour $c(n)$ opérations).

c) Ecrire une `suite_S_bis` en langage Python qui renvoie la valeur de S_n en en effectuant significativement moins d'opérations que `suite_S`.

6) On considère la suite (v_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.

a) En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ci-dessous :

```python
def suite_v(n):
    L = []
    for i in range(n+1):
        L.append(suite_u(i)-2*i+1)
    return L
```

Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> suite_v(5)
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

Conjecturer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n.
Démontrer cette conjecture.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, une forme explicite de u_n en fonction de n.

c) En déduire, pour tout entier naturel n, une forme explicite de S_n en fonction de n.

Exercice 2 Matrices et probabilités.

Partie I : Calcul matriciel

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = P^T$. *On rappelle que P^T désigne la transposée de la matrice P.*

2) Montrer que $D = P^{-1}MP$ est une matrice diagonale que l'on calculera.

3) Exprimer M en fonction de D, P et P^{-1}.

4) Déterminer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Établir que pour tout entier naturel n, on a : $M^n = PD^nP^{-1}$.

Partie II : étude de l'entraînement d'un athlète au triathlon

Les trois sports du triathlon sont : la natation, le cyclisme et la course à pied. Un athlète décide de pratiquer un sport par jour pour s'entraîner au triathlon. Il commence son entraînement par la natation, au jour 0 .

Son entraînement obéit ensuite aux règles suivantes (valables pour tout entier naturel n) :

• si l'athlète a pratiqué la natation le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  - la natation avec probabilité 0,8
  - le cyclisme avec probabilité 0,1
  - la course à pied avec probabilité 0,1

• si l'athlète a pratiqué le cyclisme le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  - la natation avec probabilité 0,1
  - le cyclisme avec probabilité 0,6
  - la course à pied avec probabilité 0,3.

• si l'athlète a pratiqué la course à pied le jour n, alors il pratiquera au jour $n+1$:
  - la natation avec probabilité 0,1
  - le cyclisme avec probabilité 0,3
  - la course à pied avec probabilité 0,6.

Pour tout entier naturel n, on désigne par :

- A_n l'évènement « l'athlète s'entraîne à la natation le jour n » et par a_n la probabilité de A_n.
- B_n l'évènement « l'athlète s'entraîne au cyclisme le jour n » et par b_n la probabilité de B_n.
- C_n l'évènement « l'athlète s'entraîne à la course à pied le jour n » et par c_n la probabilité de C_n.

1) Déterminer a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1.
2) Calculer la probabilité pour qu'il enchaîne natation - course à pied - cyclisme - natation (*dans cet ordre*) les 4 premiers jours.
3) On suppose, pour cette question seulement, que l'athlète a fait du cyclisme le jour numéro 2. Quelle est la probabilité qu'il ait fait de la natation le jour numéro 1 ?
4) Montrer *(en justifiant proprement)* que pour tout entier naturel n on a :
$$a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n + \frac{1}{10}b_n + \frac{1}{10}c_n.$$
Déterminer de même les probabilités b_{n+1} et c_{n+1} en fonction des probabilités a_n, b_n et c_n.
5) Écrire une fonction Python `Probas` d'argument un entier n et qui renvoie la liste `[`a_n `,` b_n `,` c_n`]`.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

6) Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n : $X_{n+1} = AX_n$ et exprimer A en fonction de la matrice M de la partie I.
7) En déduire que $X_n = \dfrac{1}{10^n} P \begin{pmatrix} 10^n & 0 & 0 \\ 0 & 7^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} X_0$, puis l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
8) Déterminer les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comment interpréter ce résultat sur l'entraînement de l'athlète en temps long ?
9) En utilisant les expressions de a_n, b_n et c_n, montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$\left|a_n - \frac{1}{3}\right| \leqslant K \times \left(\frac{7}{10}\right)^n, \quad \left|b_n - \frac{1}{3}\right| \leqslant K \times \left(\frac{7}{10}\right)^n \quad \text{et} \quad \left|c_n - \frac{1}{3}\right| \leqslant K \times \left(\frac{7}{10}\right)^n.$$

Partie III : généralisation

Dans cette partie, on suppose que les valeurs de a_0, b_0 et c_0 ne sont plus connues c'est-à-dire que l'athlète a choisi au jour 0 la natation (resp. le cyclisme, la course à pied) avec une probabilité a_0 (resp. b_0, c_0) inconnue. On souhaite montrer que l'estimation de la question 9 de la partie II est encore valable.

Pour cela, il serait possible de reprendre la même démarche que dans la partie II et d'exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de a_0, b_0 et c_0. Comme les expressions trouvées seraient lourdes à manipuler, on propose plutôt une approche matricielle.

On rappelle qu'on a vu à la question 6 de la partie II que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$, que les matrices P et D ont été définies dans la partie I, et que $P^{-1} = P^T$.
On considère les sous-ensembles de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants :
$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ : \ a+b+c = 0 \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1) Montrer que $X_\infty = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation matricielle $AX = X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} - X_\infty = A(X_n - X_\infty)$.
3) Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que si $X \in E$ alors $P^T X \in F$.
4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^T(X_n - X_\infty) \in F$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ on appelle norme euclidienne de X la quantité $||X||_2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

5) Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ on a $||PX||_2 = ||X||_2$.
   Indication : on pourra utiliser sans le démontrer que pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left(a+b+c\right)^2 \;=\; a^2+b^2+c^2 \;+\; 2(ab+ac+bc)\;.$$

6) En déduire que pour tout $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ on a aussi $||P^T X||_2 = ||X||_2$.
7) Montrer que pour tout $X \in F$, $\left\|\frac{1}{10}DX\right\|_2 \leqslant \frac{7}{10}||X||_2$.
8) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||X_{n+1} - X_\infty||_2 \leqslant \frac{7}{10}||X_n - X_\infty||_2$ puis que $||X_n - X_\infty||_2 \leqslant \left(\frac{7}{10}\right)^n ||X_0 - X_\infty||_2$.
9) Retrouver alors l'estimation de la question 9 de la partie II et la limite des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n).

Exercice 3 : Étude d'une famille d'équations

Lorsque $a \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$, on définit la fonction f_a sur $]0,+\infty[$ par $f_a(x) = x^a - ax + 1$. On admettra qu'elle est dérivable.

1) a) Justifier, lorsque $m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, la bijectivité de l'application $G_m : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & x^m \end{array}$.
   b) Donner une expression de $G_m^{-1}(x)$ lorsque m et x sont dans $]0,+\infty[$.
   c) Donner en fonction de $m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, le signe de l'expression $(x^m - 1)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
2) On fixe ici un réel $a \in \left]0,+\infty\right[\setminus\{1\}$.
   Calculer la dérivée de f_a et donner le tableau de signe de f_a' sur $]0,+\infty[$ en distinguant selon que $a<1$ ou bien $1<a$.
3) On suppose ici que a est un réel vérifiant $0<a<1$.
   a) Déterminer le tableau de variations complet et le maximum de f_a sur $]0;+\infty[$.
   b) Montrer que la fonction f_a s'annule en un unique réel que l'on notera $u(a)$.
   c) Trouver les racines du polynôme $P(X) = \frac{1}{2}X^2 - X - 1$ puis montrer que $u\left(\frac{1}{2}\right) = 4+2\sqrt{3}$.
   d) Montrer que $u(a) > 1 + \frac{1}{a}$.
4) À partir des résultats précédents, montrer que $u(a)$ possède une limite que l'on précisera lorsque $a \to 0^+$.
5) On suppose ici que $1<a$.
   a) Déterminer le tableau de variations complet et le minimum de f_a sur $]0;+\infty[$.
   b) Montrer que la fonction f_2 s'annule une unique fois en un réel $u(2)$ que l'on donnera.
   c) Montrer que, si $a>2$, la fonction f_a s'annule en deux réels exactement, $u(a)$ tel que $0<u(a)<1$ et $v(a)$ tel que $v(a)>1$.

On retiendra que, pour tout réel $a \in \left]0,1\right[\cup \left[2,+\infty\right[$, $u(a)$ est solution de l'équation
$\mathscr{E}_a : \quad x^a - ax + 1 = 0.$

6) On suppose ici que $2 \leqslant a$.
   a) Montrer que $0 \leqslant au(a) - 1 \leqslant 1$.
   b) En déduire que $u(a)$ possède une limite que l'on précisera lorsque a tend vers $+\infty$.
   c) Déterminer la limite de $u(a)^a$ lorsque a tend vers $+\infty$.
   d) Conclure que, lorsque $a \to +\infty$, $u(a) \sim \frac{1}{a}$.

7) On s'intéresse ici aux nombres $u(n)$, que l'on pourra également écrire u_n, lorsque n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on note aussi $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=2}^{n} (u_k)^k$.

a) Montrer que, pour tout entier k vérifiant $k \geqslant 2$, $u_k \geqslant \frac{1}{k}$. *(on pourra utiliser la question 6)a))*

b) Montrer, à l'aide d'un étude de fonction, que pour tout réel t vérifiant $t \geqslant 0$, $t \geqslant \ln(t+1)$.

c) En déduire que, pour tout entier k vérifiant $k \geqslant 2$, $u_k \geqslant \ln(k+1) - \ln(k)$.

d) Montrer que, pour tout entier n vérifiant $n \geqslant 2$, $S_n \geqslant \ln(n+1) - \ln(2)$.

e) Conclure que la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ possède une limite que l'on précisera.

f) Montrer que, pour tout entier k vérifiant $k \geqslant 2$, $0 \leqslant (u_k)^k \leqslant \left(\frac{2}{k}\right)^k$. *(on pourra utiliser la question 6)*

g) En déduire que, pour tout entier k vérifiant $k \geqslant 3$, $0 \leqslant (u_k)^k \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^k$.

h) Montrer que, pour tout entier n vérifiant $n \geqslant 3$, $T_n \leqslant (u_2)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

i) À partir des deux questions précedentes, établir la monotonie et la convergence de la suite $(T_n)_{n\geqslant 2}$ **dont on ne cherchera pas la limite**.

Annexe - Rappels de syntaxe Python.

• La commande `L.append(a)` permet de rajouter l'objet `a` en dernière position dans la liste `L`.

• On suppose que le module `matplotlib.pyplot`, qui permet de tracer des graphiques, est importé avec l'alias `plt`.

- Les variables `Lx` et `Ly` étant deux listes de réels,
  `plt.plot(Lx, Ly, "k+")` place les points dont les abscisses sont contenues dans `Lx` et les ordonnées dans `Ly`.
  Si cette fonction n'est pas suivie de `plt.show()`, le graphique n'est pas affiché.
- `plt.show()` affiche le(s) tracé(s) précédemment créé(s) par `plt.plot`.

FIN DU SUJET